Chapitre 2 : Activité 2 sur les limites de fonctions.

I Opérations sur les limites

Dans cette partie, on considère f et g deux fonctions et l et l' deux réels. Et soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

A Limite d'une somme.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$						

B Limite d'un produit.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x)$									

C Limite d'un quotient.

Dans cette partie, on suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a. Par ailleurs on choisie la notion $\bar{l}<0$ pour noté $l<0$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\bar{l}>0$	$\bar{l}<0$	$\bar{l}>0$	$\bar{l}<0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x)$												

D Cas d'une FI avec radicaux.

On a des méthodes soit de factorisation par le terme prépondérant soit avec la *quantité conjuguai*.

II Comparaison de fonction.

Proposition 1

Soient trois fonctions f, g et h définie sur un intervalle I et $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ à "l'intérieur" de I. Soit $l \in \mathbb{R}$.

- Si $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$ ...., alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$ ....
- Si $\forall x \in I,\ g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$ ...., alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) =$ ....
- Si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = l$, alors on peut affirmer que g admet une limite en α est cette limite vérifie :
$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = \text{..........}$$
.

III Outils de comparaison.

A Limite en en point.

On rappel la définition de la dérivation en un point :

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Pour tout nombre réel $a \in I$ non nul et tel que $(a+h) \in I$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f en a, le nombre
$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- On dit que la fonction f est **dérivable** en a, lorsque le taux d'accroissement $\tau(h)$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.
- Ce nombre L, lorsqu'il existe, est appelé **le nombre dérivé** de f en a, et est noté $f'(a)$:
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$
- Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Exercice 1. 1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions ci-dessous puis montrer que ces fonctions sont dérivables au point indiqué en utilisant la définition ci-dessus :

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $a = 1$. (b) $g(x) = 1 + \dfrac{3}{1-x}$ en $a = 5$. (c) $h(x) = \sqrt{x+1}$ en $a = 0$.

2. Vérifier les résultats précédents en déterminant les fonctions dérivées des fonctions précédentes sur leur ensemble de définition et en évaluant en a.

Proposition 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

B Croissante comparée.

Exercice 2. A l'aide de la calculatrice, déterminer les limites des propriétés ci-dessous :

Proposition 3

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = ...$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = ...$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = ...$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = ...$

Corolaire 4

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que P ne soit pas constant, on obtient :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{\mathrm{e}^x} = ...$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{P(x)} = ...$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} P(x)\mathrm{e}^x = ...$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} P(x)\ln(x) = ...$