Chapitre 9 : Activité sur la convexité.

A Fonction convexe, fonction concave

Définition 1

f est une fonction continue sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.

- Dire que f est **convexe** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessous** de chacune de ses cordes.
- Dire que f est **concave** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessus** de chacune de ses cordes.

Exercice 1. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. On considère $A(-1, f(-1))$ et $B(2, f(2))$.
   (a) Déterminer l'équation de la droite (AB).
   (b) Déterminer la position de $\mathscr{C}_f$ et (AB).
2. On considère $A(x_A, f(x_A))$ et $B(x_B, f(x_B))$.
   (a) Déterminer l'équation de la droite (AB).
   (b) Déterminer la position de $\mathscr{C}_f$ et (AB).
3. Soit $A(1,1) \in \mathscr{C}_f$.
   (a) Déterminer la tangente Δ en A à $\mathscr{C}_f$.
   (b) Déterminer la position de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

B Convexité d'une fonction dérivable

Exercice 2. Soit f un fonction convexe et dérivable sur un intervalle I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique sur I.

Soit $A(x_A, f(x_A))$ et $(x_B, f(x_B))$ deux points de $\mathscr{C}_f$ avec $x_A < x_B$.

1. Retrouver l'équation de la droite (AB).
2. Montrer que $\forall x \in [x_A, x_B], f(x) \leqslant \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}(x - x_A) + f(x_A) = \dfrac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B}(x - x_B) + f(x_B)$
3. En déduire que $\forall x \in [x_A, x_B], \dfrac{f(x) - f(x_A)}{x_B - x_A} \leqslant \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} \leqslant \dfrac{f(x) - f(x_B)}{x_A - x_B}$
4. On rappelle que si $a \in I$, alors :
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
   En déduire que $f'(x_A) \leqslant \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} \leqslant f'(x_B)$.
5. En déduire les variations de f'
6. Démontrons que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de ces tangentes.
   (a) Déterminer les équations des tangentes à $\mathscr{C}_f$ en A et$B$.
   (b) Déduire de la question 3. que le point B est au-dessus de la tangente en A et que le point A est au dessus de la tangente en B. Que peut-on dire de la positions des tangentes à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3. Soit f un fonction dérivable sur un intervalle I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique sur I.
Soit $A(x_A, f(x_A))$ et $(X_B, f(x_B))$ deux points de $\mathscr{C}_f$ avec $x_A < x_B$.
On suppose que toutes les tangentes à $\mathscr{C}_f$ sont toutes au dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$.
On pose $d(x) = f(x) - \dfrac{f(x_B) - f(x_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + f(x_A)$.

1. On suppose dans cette question que la fonction d admet un maximum sur l'intervalle $]x_A, x_B[$ et on notera x_C la valeur où il est atteint. On note C de point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x_C, f(x_C))$
   (a) Expliquer pourquoi $d'(x_C) = 0$.
   (b) En déduire que $f'(x_C) = \dfrac{f(x_B) - f(x_A}{x_B - x_A}$

(c) Montrer que l'équation de la tangente en C à $\mathscr{C}_f$ est :

$$T_C: \ y = \frac{f(x_B) - f(x_A}{x_B - x_A}(x - x_C) + f(x_C)$$

(d) En utilisant l'une des hypothèses faites sur f dans l'énoncé, montrer que $d(x_C) \leqslant 0$.

2. Déduire de la question précédente que $\forall x \in [x_A, x_B], \ d(x) \leqslant 0$.
3. Que peut-on dire des cordes de $\mathscr{C}_f$ dans le cas ou les tangentes à $\mathscr{C}_f$ sont toutes en dessous ?

On peut déduire des deux exercices précédents l'énoncé ci-dessous.

Proposition 1

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.

- Dire que f est **convexe** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessus** de chacune de ses tangentes.
- Dire que f est **concave** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessous** de chacune de ses tangentes.

C Convexité d'une fonction et dérivée

1 Convexité et sens de variation de f'

Proposition 2

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est **convexe** sur I si, et seulement si, f' est **croissante** sur I.
- f est **concave** sur I si, et seulement si, f' est **décroissante** sur I

2 Convexité et signe de f''

Définition 2

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Dire que f est **deux fois dérivable** sur I signifie que f' est elle-même dérivable sur I. La dérivée de f', notée f'', est appelée **dérivée seconde** de f.
On définie ainsi par itération une fonction k**-dérivable** et l'on notera la dérivée k-ième $f^{(k)}$.

Proposition 3

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si, et seulement si f'' est positive sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si f'' est négative sur I.

3 Point d'inflexion et dérivée seconde

Proposition 4

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. La courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.