Chapitre 11
Démonstrations des résultats du cours.

Notation : Dans ce chapitre l'on notera $\mathscr{E}$ l'espace rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Proposition 1 (caractérisation de droites et de plans de l'espace)

Soit A un point de l'espace et $\overbrace{u}$ un vecteur de l'espace. Alors :

- Si l'on note (d) la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ alors :

$$M \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \quad \text{sont colinéaires}$$

On peut aussi noté $(d) = \left\{M \in \mathscr{E} | \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires}\right\}$

- Si l'on note $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ alors :

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ orthogonaux}$$

On peut aussi noté $\mathscr{P} = \left\{M \in \mathscr{E} | \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ orthogonaux}\right\}$

A Énoncé 1

1 Cas particulier.

Hypothèse : Soients $A(3,-1,2)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

Si l'on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, alors :
Compléter la démonstration ci-dessous :

$$M(x,y,z) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix}x-3\\ \ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\ \ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= 3-t\\ y &= \ldots\ldots\\ z &= \ldots\ldots\end{cases}}_{\text{Représentation paramétrique de } \mathscr{D}}$$

2 Cas général.

Cette fois les données sont les suivantes :

Hypothèse : Soients $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

Si l'on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, alors :
Reproduire la démonstration précédente avec les hypothèses ci-dessus :

B Énoncé 2

1 Cas particulier.

Hypothèse : Soients $A(1,-2,2)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, alors :
Recopier et compléter la démonstration ci-dessous :

$$M(x,y,z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont } \ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

Or $\overrightarrow{AM}$: $\begin{pmatrix} x-1 \\ ..... \\ ..... \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}$: .... donc :

$$M(x,y,z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (x-1)\times(-1) + ... + ... = ... \Leftrightarrow .....x + ...y + ...z + ... = 0$$

2 Cas général.

Cette fois les données sont les suivantes :

Hypothèse : Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, alors :
Reproduire la démonstration précédente avec les hypothèses ci-dessus :

C Énoncé 3 :

1 Cas particulier

Hypothèse : On considère cette fois l'ensemble $\mathscr{P}$ des points $M(x,y,z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifies :

$$2x + 3y - z - 1 = 0$$

1. Déterminer les coordonnées d'un point de $\mathscr{P}$, l'on notera A le point de dont vous aurez indiqué les coordonnées.
2. Soit $M(x,y,z)$ un point de $\mathscr{P}$.
   (a) C'est à dire que $2x + 3y - z - 1 =$ .....
   (b) Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$
   (c) On pose $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM}$
   (d) En déduire la nature de l'ensemble $\mathscr{P}$.

2 Cas général

Hypothèse : On considère cette fois l'ensemble $\mathscr{P}$ des points $M(x,y,z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifies :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Avec a, b, c et d 4 réels et a, b, c non tous nuls.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{P}$ et $M(x,y,z)$ un point de $\mathscr{P}$. On pose $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Montrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. En déduire la nature de l'ensemble $\mathscr{P}$.

Ex page 385