Chapitre 3 : Activité sur le dénombrement

I Cardinal d'un ensemble, produit cartésien et p-liste (avec répétition).

Exercice 1

Vous pourrez répondre aux questions sans justifier.

a) Nombre de nombres entiers entre 0 et 999.

b) Nombre d'éléments de l'ensemble $[\![0,9]\!]^3$. (On appellera ce nombre le " **cardinal** " de $[\![0,9]\!]^3$ et on le notera $\text{Card}([\![0,9]\!]^3)$).

c) Nombre de nombres entiers entre 0 et 999, n'ayant ni 5 ni 7.

d) Nombre d'éléments de l'ensemble $\{0,1,2,3,4,6,8,9\}^3$.

e) Nombre de mots de 4 lettres possibles en utilisant que les 6 voyelles. (c'est-à-dire : Nombre d'éléments de $\{a,e,i,o,u,y\}^4$)

f) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère un ensemble E constitué de n éléments. Déterminer le nombre d'éléments de E^p. (Chaque élément de E^p sera appelé une **p-liste** ou **p-uplets** de E)

g) Donner un élément quelconque de $\{0,1,2\} \times \{3,4\} \times \{5,6,7,8,9\}$. Déterminer :

$$\text{Card}\left(\{0,1,2\} \times \{3,4\} \times \{5,6,7,8,9\}\right)$$

h) Soit A et B deux ensembles non-vides finis. Déterminer :

$$\text{Card}(A \times B)$$

i) Plus généralement soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \cdots A_n)$ une famille d'ensembles non vides finis. Déterminer

$$\text{Card}(A_1 \times \cdots \times A_n)$$

Exercice 2

On considère l'ensemble $E = [\![1,20]\!]$. A et B deux sous-ensembles de E constitués respectivement des nombres pairs et des multiples de 3. On note $\overline{B}$ le complémentaire de b dans E.

Donnez sans justifier (ou presque) les valeurs de :

a) $\text{Card}(E)$

b) $\text{Card}(B)$

c) $\text{Card}(\overline{B})$

d) $\text{Card}(A)$

e) $\text{Card}(A \cap B)$

f) $\text{Card}(A \cup B)$

Exercice 3

Vous disposez de 10 paires de chaussettes différentes que vous voulez ranger dans 4 tiroirs.

De combien de manières différentes pouvez-vous le faire ?

II p-liste sans répétition et permutation.

Exercice 4

a) 10 amis font la course pour arriver au sommet du Pic du midi d'Ossau. On veut déterminer le nombre de podiums possibles (Les trois premiers seulement, on parlera alors de **3-liste sans répétition** d'un ensemble à 10 éléments)

b) Cette fois on s'intéresse au classement des 10 participants. Donner le nombre de classements possibles. (On parlera du nombre de **permutation** de l'ensemble constitué des 10 participants.)

c) On considère cette fois-ci qu'il y a n participants. Déterminer le nombre de podiums possibles, puis comme précédemment le nombre de classements possibles (de tous les participants).

d) Pour n participants maintenant, on classe les p premiers participants. Déterminer le nombre de p-listes sans répétition de ces n participants.

III Combinaisons.

Exercice 5

Un groupe d'amis sont dans un camping : Albert, Bertrand, Colin, Didier et Éliot.

Certains doivent aller faire des courses au village d'à côté.

Vous pourrez répondre aux questions suivantes sans justifier.

Soit $p \in [\![0, 5]\!]$.

On cherche de combien de façons on peut désigner p d'entre eux pour aller faire les courses.

Par exemple pour p=1. Il y a 5 façons : soit Albert, soit Bertrand, ..., soit Éliot. Chacune des ces sous-parties de l'ensemble $E = \{Albert, Bertrand, Colin, Didier, Eliot\}$ est appelée une **1-combinaison** de l'ensemble E.

Déterminer ce nombre p-combinaison pour :

a) p=2 b) p=3 c) p=4 d) p=5

Exercice 6

Soit E un ensemble à n éléments avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On décide de noter C_n^p le nombre de p-combinaisons de l'ensemble E. (c'est-à-dire le nombre de sous-parties de E à p éléments) **Attention notation non conventionnelle**

1. Déterminer C_n^0.
2. Déterminer C_n^1.
3. Déterminer C_n^2.
4. On choisit un élément a de E. Soit $p \in [\![1; n-1]\!]$.
   (a) Parmi les réponses possibles ci-dessous laquelle représente le nombre de sous-parties à p éléments **contenant** l'élément a.

   i. C_n^p ii. C_n^{p-1} iii. C_{n-1}^p iv. C_{n-1}^{p-1}

   (b) Parmi les réponses possibles ci-dessous laquelle représente le nombre de sous-parties à p éléments **ne contenant pas** l'élément a.

   i. C_n^p ii. C_n^{p-1} iii. C_{n-1}^p iv. C_{n-1}^{p-1}

5. Déduire de la question précédente, la relation :
$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$
   Cette relation vous rappelle-t-elle une formule déjà vue ?
6. Montrer par récurrence que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$: $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

   On notera :
$$\mathcal{P}_n : \forall p \in [\![0, n]\!],\ C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$
7. On peut retrouver l'expression de C_p^n en utilisant le nombre de p-liste sans répétition.
   (a) Donner le nombre de permutation d'une p-liste sans répétition de E.
   (b) En déduire que $C_n^p = \dfrac{\text{nb de p-liste sans répétition de E}}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dbinom{n}{p}$

On notera dorénavant $\dbinom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons de l'ensemble E (et non C_n^p notation devenue obsolète)

Exercice 7

1. Déterminer le nombre de fonctions indicatrices de E (c'est-à-dire le nombre d'applications de E dans $\{0; 1\}$, l'ensemble $\mathcal{A}(E; \{0; 1\})$
2. On considère
$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{A}(E; \{0; 1\} \\ & & A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$
   Montrer que φ est bijective. En déduire $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$.