Chapitre 5 : Activité sur la dérivation.

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Pour tout nombre réel $a \in I$ non nul et tel que $(a+h) \in I$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f en a, le nombre
$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
- On dit que la fonction f est **dérivable** en a, lorsque le taux d'accroissement $\tau_a(h)$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.
- Ce nombre L, lorsqu'il existe, est appelé **le nombre dérivé** de f en a, et est noté $f'(a)$:
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau_a(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$
- Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Exemple 1. Voici un exemple d'utilisation des définitions précédentes pour déterminer une fonction dérivée. On utilisera l'application ***photomath***.

Si l'on considère la fonction $g : x \to x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ dont on veut déterminer la dérivée en $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\tau_a(h) = \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$$

En écrivant proprement et lisiblement. On demande à ***photomath*** de simplifier l'expression :

$$\frac{(a+h)^3 - a^3}{h} =$$

Dés lors photomath nous donne la simplification avec les calculs intermédiaires :

$$\begin{aligned}
\tau_a(h) &= \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\
&= \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\
&= \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} \\
&= \frac{h(3a^2 + 3a + h^2}{h} \\
&= 3a^3 + 3ah + h^2
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\tau_a(h) = \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = 3a^3 + 3ah + h^2 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 3a^3$$

La fonction dérivée de g (fonction cube) est $g'(x) = 3x^2$.

On peut alors compléter le tableau sur **les dérivées des fonctions usuelles** ci-dessous :

Fonction f	Dérivée f'	f est dérivable sur
8 (constante)		$\mathbb{R}$
k (constante)		$\mathbb{R}$
x		$\mathbb{R}$
$4x+5$		$\mathbb{R}$
$ax+b$ (affine)		$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^2		$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$		$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$

Exercice 1. La l'aide de l'application ***photomath*** (si nécessaire), déterminer le taux d'accroissement des fonctions suivantes en a, ainsi que leur limite en 0. Vous compléterez alors le tableau précédent.

a) $f : x \to x^2$ en $a \in \mathbb{R}$

b) $h : x \to \dfrac{1}{x}$ en $a \in \mathbb{R}^*$

c) $w : x \to 4x+5$ en $a \in \mathbb{R}$

d) $z : x \to 8$ en $a \in \mathbb{R}$