Activité introduction exponentielle.

Exercice 1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = cos(-3x + \pi)$$

Déterminer la dérivée de la fonction f.

Exercice 2. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes suivantes, (en fonction de f') :

Indication : on pourra utilisez la formule $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$.

a) $g(x) = f(2x + 1)$
b) $h(x) = f(-x)$
c) $t(x) = f(x^2 - 3)$

Exercice 3. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété : $f'' = -f \quad (1)$.

1. Connaissez-vous des fonctions vérifiant cette propriétés ?
2. Soient deux réels a et b. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a\cos x + b\sin x$$

   Montrer que f vérifie la propriété (1).
3. On veut déterminer une fonction f vérifiant :

$$f(0) = 1\ ,\ f'(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)$$

   Déterminer les valeurs de a et b, si l'on souhaite que la fonction $f(x) = a\cos x + b\sin x$ (définie en 2.) vérifie la propriété précédente.

Exercice 4. On veut déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) \tag{1}$$

1. On considère ici que que de telles fonctions existent.
   On considère donc deux fonctions f et g (non forcément distinctes) vérifiant (1) .
   On définie la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = g(x) \times f(-x)$$

   (a) En n'oubliant pas d'utiliser que $g' = g$ et $f' = f$, déterminer l'expression de $h'(x)$.
   (b) En déduire que h est une fonction constante et déterminer **sa** valeur.
   (c) En considérant le cas où $g = f$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) \times f(x) = 1$$

   (d) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x)$$

2. Construction de la fonction f par approximation (Algorithme Python). On considère une fonction f vérifiant (1) et $\mathscr{C}_f$ sa représentation.
   (a) Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_1$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (b) Déterminer les coordonnées du point A_1 de $\mathscr{T}_1$ d'abscisse 1.
   (c) On considère que ce point A_1 est un point de $\mathscr{C}_f$. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_1$ à $\mathscr{C}_f$ au point A_1.
3. Détermination de f comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import exp
n=10                                    # initialisation
y=1
t=0
h=3/float(n)
temps=[0]
fonction=[1]
expo=[1]
for i in range(n) :
    y=y+h*y
    t=t+h
    temps.append(t)
    fonction.append(y)
    expo.append(exp(t))
plt.plot(temps,fonction)
plt.plot(temps,expo)
plt.show()
```