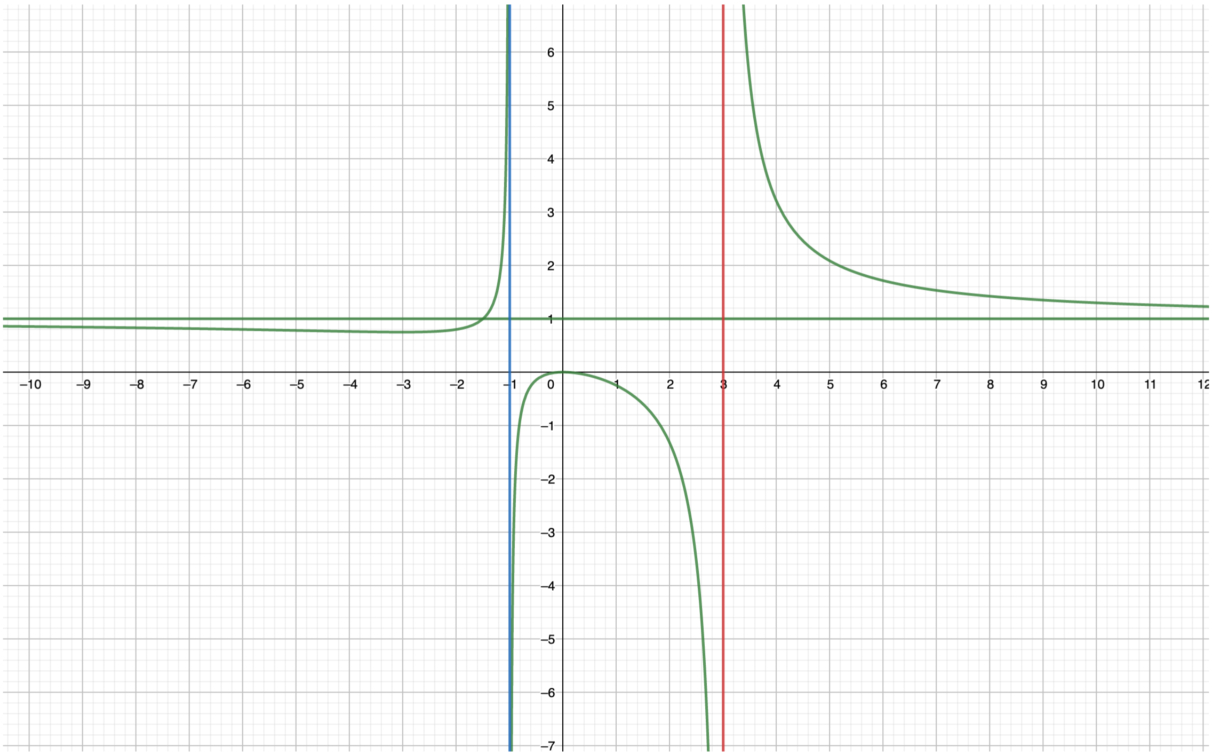
Activité : limite de fonction.

Énoncé 1 : On considère une fonction f définie sur un $]-\infty;-1[\,\cup\,]-1,3[\,\cup\,]3;+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]-\infty;-1[\,\cup\,]-1,3[\,\cup\,]3;+\infty[\,,\, f(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$$

Vous trouverez ci-dessous la représentation graphique de la fonction f (ainsi que les droites d'équation $x=-1$, $x=3$ et $y=1$) :



Recopier et compléter le tableau de variation ci-dessous par lecture graphique :

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
$f(x)$					

Compléter les valeurs manquantes ci-dessous :

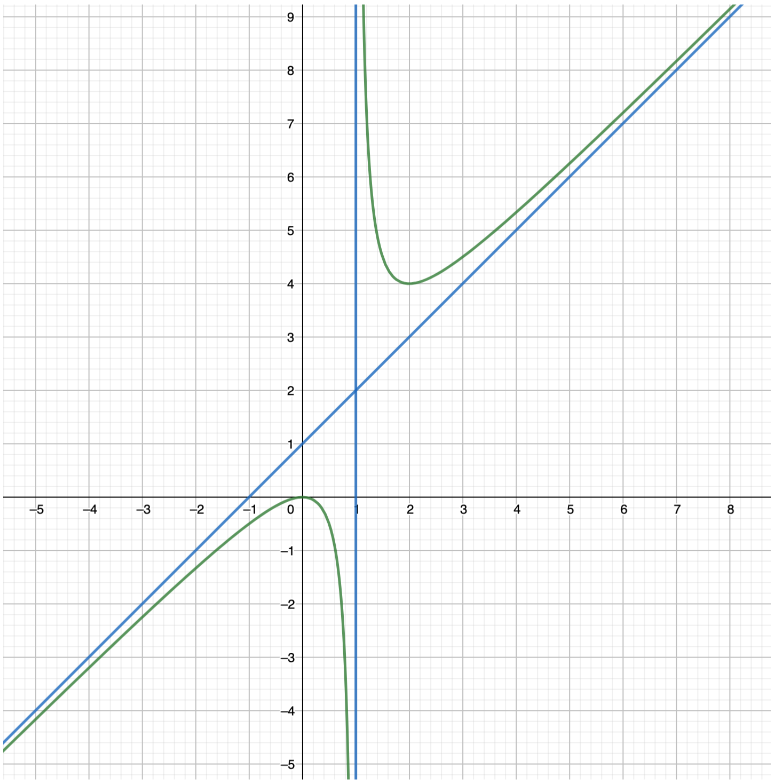
- $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\mapsto\ldots\ldots} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\mapsto3^+} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\mapsto\ldots\ldots} = -\infty$

Énoncé 2 : On considère une fonction g définie sur un $]-\infty;1[\,\cup\,]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]-\infty;1[\,\cup\,]1,+\infty[\,,\, g(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Utilisez votre calculatrice pour déterminer le tableau de variation de la fonction g ainsi que ces limites aux bornes de son ensemble de définition.

Ci-dessous la représentation graphique de la fonction g :



Enoncé 3 : On donne ci-dessous la définition des limites en l'infini d'une fonction f.

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a; +\infty[$. On dira que f admet une limite en $+\infty$, si elle vérifie :
1^{ier} **cas :** Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe une valeur $\alpha \geqslant a$ tel que :

$$\forall x \in I, x \geqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

Et alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ....
On a une définition similaire pour $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. ***Écrire cette définition.*** $2^{iéme}$ **cas :** Il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha \geqslant a$ tel que :

$$\forall x \in I, x \geqslant \alpha \Rightarrow f(x) \in]l - \epsilon; l + \epsilon[$$

Et alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ .....

Précisez si la limite de la fonction f en $+\infty$ s'inscrit dans le premier cas ou dans le deuxième cas et compléter la définition précédente.
Faire de même avec la fonction g.

Définition-Proposition 1

Avec les notions précédentes, lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$. On dira que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de f.

Situation 4 page 77