Activité sur les suites récurrentes.

Objectif : Étude d'une suite de la forme :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

Déroulement de la séance :

Vous travaillerez par groupe de 4 sur un des tableaux présents sur les murs de la salle (Le professeur en attribue 1 par groupe) pour rechercher l'exercice portant le numéro du groupe :

- Un *Animateur* se charge de gérer les prises de parole et veille à ce que le niveau sonore reste acceptable.
- Un *Rédacteur* se charge d'écrire au tableau.
- Un *Ambassadeur* communique avec l'enseignant et éventuellement les autres groupes.
- Un *Maitre du temps* est responsable de l'avancement du travail du groupe et de la gestion du temps. **Attention !** L'objectif n'est-pas de finir l'exercice attribué (qui est un peu long) mais d'avancer de concert. Ce qui est fait doit être bien fait.

Exercice 1. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 1 = f(u_n) \end{cases}$$

Où la fonction f est la fonction affine définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{3}{4}x + 1 \end{array}$$

1. Sur le même graphique, représenter les droites d'équation $y = x$ et $y = \dfrac{3}{4}x + 1$.
2. Si nécessaire, visionner la vidéo tutoriel (https ://www.youtube.com/watch ?v=vsi4JWESSH0) sur la représentation d'une suite récurrente, pour représenter les 5 premiers termes de la (u_n).
3. Pensez-vous que cette suite possède un majorant ? Et si c'est le cas, en donner un.
4. La suite (u_n) est-elle monotone ?
5. Démontrer par récurrence les résultats conjecturés lors des deux questions précédentes.

Exercice 2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

2. Que pensez-vous du comportement de la suite (u_n) ? (Majoration, variation...)
3. Montrer par récurrence l'inégalité trouvée à la question précédente.
4. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 4$$

Exercice 3. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = 4 - u_n$$

(On remarquera que $u_n = 4 - v_n$.)

1. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivants :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v_n										

2. Que pensez-vous de la nature de la suite (v_n) ? (On pourra déterminer les valeurs successives de $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$)
3. Démontrer le résultat conjecturé précédemment.
4. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n. (On rappelle que pour montrer qu'une suite est géométrique de raison q, l'on peut démontrer que $v_{n+1} = qv_n$)
5. Reprendre l'exercice en choisissant cette fois $u_0 = 12$.

Exercice 4. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 1 = f(u_n) \end{cases}$$

Où la fonction f est la fonction affine définie par :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3}{4}x + 1 \end{array}$$

1. Sur le même graphique, représenter les droites d'équation $y = x$ et $y = \dfrac{3}{4}x + 1$.
2. Si nécessaire, visionner la vidéo tutoriel (https ://www.youtube.com/watch ?v=vsi4JWESSH0) sur la représentation d'une suite récurrente, pour représenter les 5 premiers termes de la (u_n).
3. Pensez-vous que cette suite possède un majorant ? Et si c'est le cas, en donner un.
4. La suite (u_n) est-elle monotone ?
5. Démontrer par récurrence les résultats conjecturés lors des deux questions précédentes.

Exercice 5. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

2. Que pensez-vous du comportement de la suite (u_n) ? (Majoration, variation...)
3. Montrer par récurrence l'inégalité trouvée à la question précédente.
4. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \geqslant 4$$