# Activité d'introduction sur les suites.

**Définition 1**

Une **suite** $u$ est une **fonction** de définie de $\mathbb{N}$ (parfois $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$. La notation utilisé pour $u(n)$ est plus communément $u_n$ (lu "u indice n"). On parlera alors de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement de $(u_n)$.

**Exercice 1.**

La fonction :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto n^2+1 \end{aligned} .$$

Donc on peut calculer les images, appelés termes de la suite :

$$u(0) = u_0 = 0^2+1 = 1 \quad ; \quad u(2) = u_2 = 2^2+1 = 5 \quad ; \quad u(10) = u_{10} = 10^2+1 = 101$$

Ou encore :

$$u(n+1) = u_{n+1} = (n+1)^2+1 = n^2+2n+2 \quad ; \quad u(n-3) = u_{n-3} = (n-3)^2+1 = n^2-6n+10 \quad (n \geqslant 3)$$

Nous pouvons obtenir les termes 10 premiers termes de cette suite à partir de l'algorithme :

```
N ← 10
pour n dans {0, 1, 2, ..., N − 1} faire
    U = n^2 + 1
    Afficher U
```

```
En Python
N = 10
for n in range(0,N) :
    U = n**2 + 1
    print( U)
```

Implémentez le programme précédent sur Edupython.
Modifier l'implémentation précédente pour obtenir les 15 premiers termes de la suite $(v_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{n-2}{n+3}$$

Que peut-on dire des valeurs de la suite $(v_n)$.

**Exercice 2.** Une série de nombre peut aussi être définie par une série de nombre :

a) 1, 3, 5, 7, 9, ....
b) 1,2,4,8,16, ...
c) 243,81,27,9, ...
d) 1, 3, 7, 15, 31, 63 ...
e) 1,5,17,53,161,...
f) 2, 5, 10,17, 26 ...

On note respectivement $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$, $(d_n)$, $(e_n)$ et $(f_n)$ est suites précédentes.

1. Pour chacune des suites précédentes données les 3 termes qui suivent si vous arrivez à les deviner.
2. Explicitement pour chacune des suites précédentes, on peut trouver un moyen pour déterminer le terme suivant en fonction du terme précédent :

| | | |
|---|---|---|
| Pour la suite $(a_n)$ | On ajoute 2 au terme précédent | $a_{n+1} = a_n + 2$ |
| Pour la suite $(b_n)$ | | |
| Pour la suite $(c_n)$ | | |
| Pour la suite $(d_n)$ | | $d_0 = 1$ et $d_{n+1} = 2 \times d_n + 1$ |
| Pour la suite $(e_n)$ | On multiplie le terme précédent par 3 et on ajoute 1. | |
| Pour la suite $(f_n)$ | | $f_0 = 2$ et $f_{n+1} = f_n + 2n + 3$ |

Recopier et compléter le tableau précédent.

3. Nous pouvons obtenir les termes 10 premiers termes de la suite $(a_n)$ à partir de l'algorithme :

| |
|---|
| $N \leftarrow 10$ |
| $A \leftarrow 1$ |
| pour n dans $\{0, 1, 2, ..., N-1\}$ faire |
| $A \leftarrow A + 2$ |
| Afficher $A$ |

| |
|---|
| En Python |
| $N = 10$ |
| $A = 1$ |
| for n in range(1,N) : |
| $A = A + 2$ |
| print("le terme d'indice", n, "est", $U$) |

(a) Implémentez le programme précédent sur Edupython.

(b) Vous recopierez le programme précédent et le modifierez de sorte d'obtenir les 10 premiers termes des suites $(b_n)$, $(c_n)$, $(d_n)$, $(e_n)$ et $(f_n)$.

**Exercice 3.** Un pays compte 300 loups en 2017. On estime que la population des loups croit naturellement au rythme de 12 % par an. Pour réguler la population des loups, le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.

On modélise la population par une suite $(u_n)$, le terme $u_n$ représentant le nombre de loups de ce pays en $2017 + n$.
On a alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,12u_n - 18$.

Nous pouvons obtenir les termes 20 premiers termes de cette suite à partir de l'algorithme :

| |
|---|
| $N \leftarrow 0$ |
| $U \leftarrow 300$ |
| Tant que $N < 20$ faire |
| $U \leftarrow 1,12 \times U - 18$ |
| $N \leftarrow N + 1$ |
| Afficher $U$ arrondi à l'entier |
| Fin Tant que |

| |
|---|
| En Python |
| $N = 0$ |
| $U = 300$ |
| while $N < 20$ : |
| $U = 1,12 * U - 18$ |
| $N = N + 1$ |
| print( "le terme d'indice", n, "est",round($U$)) |

On obtient alors : 318 338 360 386 414 446 481 521 565 615

**Exercice 4.** La grand mère de Philémon lui a donné en 2010 une somme de 100 € pour noël. Puis chaque année elle augmente cette somme de 10 € (elle lui donnera donc en 2011 la somme de 110 €, puis 120 € en ). Philémon garde ces sommes dans une boîte.

**Partie A**

1. Écrire un programme Python qui permet de déterminer la somme que donne la grand mère en 2018.
2. Améliorer cette procédure afin qu'elle permette aussi d'obtenir la somme dont dispose Philémon dans la boîte.
3. Expliquez pourquoi la suite $(u_n)$ modélisant cette situation est une suite arithmétique et retrouver par les formules connues sur les suites arithmétiques les résultats obtenus par la procédure précédente.

**Partie B**

La grand mère avait hésité en 2011 avec deux types d'augmentation :

- Comme prévu à la partie A et modélisé par la suite $(u_n)$.
- Ou une augmentation de 8 % par an. Solution que l'on modélisera par la suite $(v_n)$.

Écrire une procédure qui permet de comparer chaque année jusqu'en 2030, les sommes versées par la grand mère pour les deux types d'augmentation ainsi que les sommes présentent dans la boîte dans les deux cas.

**Partie C**

Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ les expressions de $u_n$ et $v_n$ ainsi que : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *et* $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

**Exercice 5.** On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

Cet algorithme est l'algorithme de Héron pour déterminer une approximation de la racine carré de $a$.

**Partie A**

1. Écrire une procédure permettant d'obtenir les 20 premiers termes de cette suite pour $a = 2$ puis $a = 3$ puis enfin pour $a = 5$.
2. Comparez ces résultats avec les valeurs de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.

**Partie B**

3. On définie la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$
On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$
   (a) Déterminer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de $f$ sur $[1, 2]$.
   (b) Vérifier que $\sqrt{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0$ et en utilisant le tableau de variation précédent, comparez $\sqrt{2}$, $f(u_1)$ et $f(u_0)$, puis $\sqrt{2}$ , $u_2$ et $u_1$.
   (c) On suppose cette fois que pour un $n \in \mathbb{N}$ on a $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ . Justifier que $\sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ .
4. On considère la droite $d$ (appelée première bissectrice) dont l'équation est $y = x$.
   (a) Sur un même graphique représentez la fonction $f$ et la droite $d$ sur l'intervalle $[1; 2]$.
   (b) Vous utiliserez les tutoriels :
      - `https://www.youtube.com/watch?v=vsi4JWESSH0`
      - `https://www.youtube.com/watch?v=J4KOZ83QMo0`

   pour représenter les premiers termes de la suite $(u_n)$, comme dans ces vidéos.
   (c) Conjecturer la variation de la suite $(u_n)$ ainsi que la limite de cette suite.

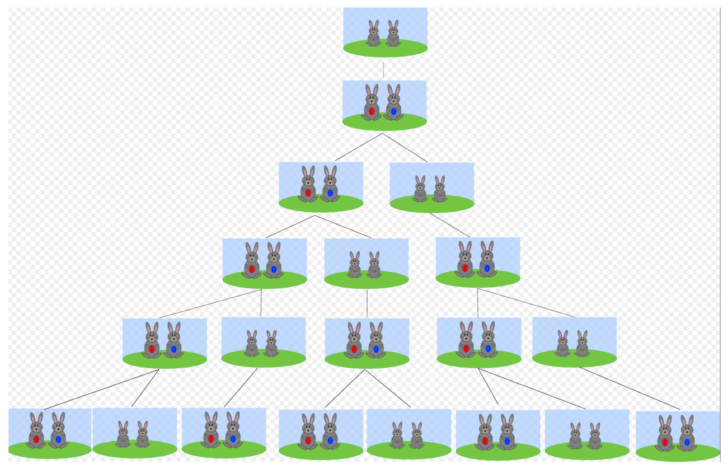
**Exercice 6.** Leonardo Pisano Fibonacci (v. 1175 – v. 1250) est le plus connu des mathématiciens du Moyen Âge. Il est surtout connu par la suite de nombres qui porte son nom. Elle aurait été découverte en comptabilisant les lapins suite à leur reproduction. Fibonacci met au point la formule qui permet de déduire la quantité de lapins de la saison suivante à partir des quantités des saisons précédentes. Cette formule devient la première formule avec récursivité connue de l'histoire. Ce fut une contribution majeure à la partie des maths nommée combinatoire.
Les naissances des lapins selon Fibonacci :

- En janvier un jeune couple de lapereaux est réuni.
- En février, ce couple devient adulte et en age de procréer.
- En mars, ce couple donne naissance à un couple de lapereaux.
- La suite suit les règles suivantes :
  - — Un couple adulte donne naissance à un couple de lapereaux tous les mois ;
  - — Par contre un couple de lapereaux doit attendre un mois avant d'atteindre sa maturité et, adulte, se mettre à procréer tous les mois.

La question qui se pose est : "Combien de couples lapins selon le mois de l'année ?"
On peut montrer que si l'on note $\mathcal{F}_n$ le nombre de couple adulte le $n^{ième}$ mois après janvier (donc $\mathcal{F}_0 = 1$ et $\mathcal{F}_1 = 1$) , on obtient à partir du rang 2 :

$$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$$

Écrire une procédure permettant d'obtenir les valeurs successives de cette suite.



Si nous nous plaçons au mois $n$ et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois $n + 2$ : $\mathcal{F}_{n+2}$ désigne la somme des couples de lapins au mois $n + 1$ et des couples nouvellement engendrés. Or, n'engendrent au mois $n + 2$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant. On a donc, pour tout entier $n$ strictement positif :

$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$$