Exercices : Utilisation du produit scalaire.

Notation : On notera $\mathscr{P}$ le plan et $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du pan. Dans l'ensemble de ce chapitre on se situera dans ce plan

I Ensemble de point.

A Équation de droite.

Définition 1

On appelle vecteur normal à une droite d, tout vecteur $\vec{n}$ dont la direction est orthogonale à la direction de la droite d.

Exercice 1. Soit $A(2;3)$ un point et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ un vecteur donné. On note d la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Soit $M(x,y)$ un point de d.

1. Que peut-on dire du produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$?
2. Puisque $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$, déduire de la question précédente :
$$x-2y+4=0$$
Cette equation est donc une équation cartésienne de d.
3. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de d.
4. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{n}$.

Exercice 2. Soit Δ une droite d'équation cartésienne $3x-y-3=0$.

1. Déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal de Δ.
2. Trouver l'équation de la perpendiculaire à Δ passant par A.

B Équation de cercles.

Exercice 3. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $A(2;3)$ et de rayon 5. Soit $M(x,y)$ un point quelconque du cercle $\mathscr{C}$.

1. Quelle la valeur de AM^2 ?
2. Sachant que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$, déduire de la question précédente :
$$x^2+y^2-4x-6y-12=0$$
Cette équation sera appelée l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 4. On considère l'équation : $x^2-10x+y^2+2y+20=0$

1. Développez $(x-5)^2+(y+1)^2$
2. En déduire que $x^2-10x+y^2+2y+20=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y+1)^2=81$
3. En déduire la nature de l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan qui vérifie l'équation $x^2-10x+y^2+2y+20=0$.

Exercice 5. Soient $A(-4;-1)$ et $B(14;-1)$, et $M(x,y)$ un point du plan vérifiant : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

1. A partir de la formule analytique du produit scalaire, déterminer l'équation vérifiée par les coordonnées du point M.
2. Conclure en utilisant l'exercice précédent.

II Triangle et produit scalaire.

A Théorème de la médiane.

Exercice 6. Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$ et I le milieu du segment $[AB]$ et M un point quelconque du plan.

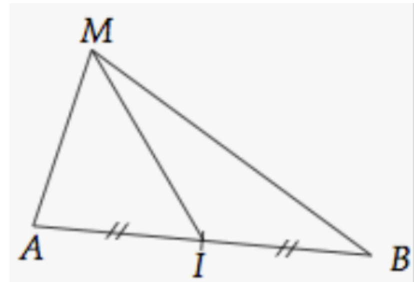
1. Déterminer $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$.
2. Montrer que :

$$MA^2+MB^2=MI^2+IA^2+IB^2$$

Indication : On utilisera la relation de Chasles pour écrire $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$ *et* $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$

3. Montrer que $IA2+IB^2=\frac{1}{2}AB^2$
4. En déduire :

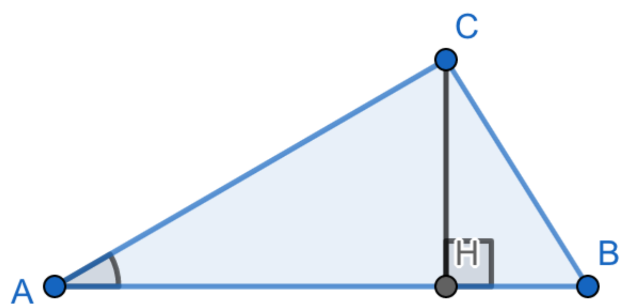
$$MA^2+MB^2=MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$



B Relations métriques dans le triangle.

Exercice 7. On considère un triangle ABC, on note H le projeté orthogonal de C sur (AB).
On $AC=8$, $AB=10$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{6}$.

1. En vous plaçant dans le triangle rectangle ACH déterminer la longueur CH.
2. En déduire la surface du triangle ABC.
3. Cadre général (en supposant que l'on connait aucune longueur)
   (a) Justifier que $CH=AC\times\sin\widehat{A}$.
   (b) En déduire $S=\frac{1}{2}AB\times AC\sin\widehat{A}$
   (c) Déduire de la relation précédente, deux autres expressions de S avec les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle ABC.



III Formules d'addition et d'angles doubles.

A Formules d'addition.

Exercice 8. On définit $A(\cos a,\cos b)$ et $B(\cos b,\sin b)$, alors A et B sont sur le cercle trigonométrique et $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)=a$, $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=b$ et enfin $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=b-a$ (relation de Chasles pour les angles orientés).

1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ en utilisant la formule obtenue à partir des coordonnées des vecteurs.
2. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ en utilisant la formule avec le cosinus.
3. En déduire que $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.
4. En déduire une expression de $\cos(a+b)$
5. En utilisant la formule $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, trouvez une expression de $\sin(a-b)$ puis de $\sin(a+b)$.
6. En posant $a=b$ déterminer une expression de $\cos 2a$ et de $\sin 2a$ à partir des formules précédentes.