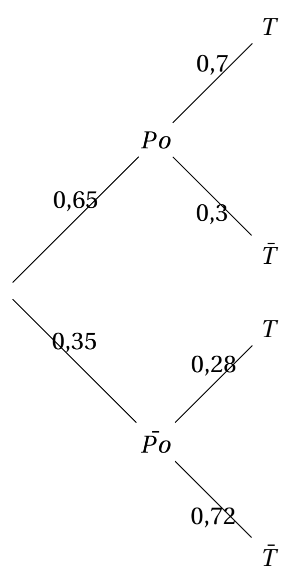
Feuille Wims n° 4 : Probabilité conditionnelle.

Attention, vous trouverez ci-dessous des indications pour la feuille Wims numéro 4. Ce n'est en aucun cas un corrigé. C'est-à-dire que la rédaction est minimale et souvent trop succincte pour une rédaction demandée lors du contrôle par exemple. En revanche elle doit vous permettre de faire les exercices. Par ailleurs, il vous est conseiller de bien travailler les méthodes données dans le cours polycopié.

Exercice 1. **Extrêmement difficile** Lorsque la rivière qui longe le village XXX déborde, la probabilité que la source du village soit polluée est de 0.5 le lendemain. Dans le cas où cette rivière déborde, un employé municipal est chargé de prélever 3 échantillons d'eau de la source le lendemain et d'analyser séparément chaque échantillon.
L'analyse d'un échantillon n'est pas totalement fiable : dans seulement 98 % des cas, l'analyse d'un échantillon contenant de l'eau polluée indiquera que l'eau est polluée. dans seulement 72 % des cas, l'analyse d'un échantillon contenant de l'eau saine indiquera que l'eau est non polluée. Si l'eau contenue dans 2 échantillons sur les 3 échantillons prélévés est déclarée non polluée par l'analyse effectuée, quelle est la probabilité que le maire se trompe en déclarant que l'eau est saine ?
On pose S l'évènement l'eau est saine et N_i l'événement le test i annonce que l'eau est non pollué. On note X le nombre de tests négatifs sur les 3 tests effectué.
La probabilité que le maire se trompe correspond à $P_{X=2}(\bar{S})$
$P(X=2) = P\big((N_1 \cap N_2 \cap \bar{N_3}) \cup (N_1 \cap \bar{N_2} \cap N_3) \cup (\bar{N_1} \cap N_2 \cap N_3)\big) = P\big((N_1 \cap N_2 \cap \bar{N_3})\big) + P(N_1 \cap \bar{N_2} \cap N_3) + P(\bar{N_1} \cap N_2 \cap N_3) = 3 \times 0{,}002 \times 0{,}002 \times 0{,}98 + 3 \times 0{,}72 \times 0{,}72 \times 0{,}28 = 0{,}436632$
$P_{X=2}(\bar{S}) = \dfrac{3 \times 0{,}02^2 \times 0{,}98}{0{,}436632} = 0.0026933436$

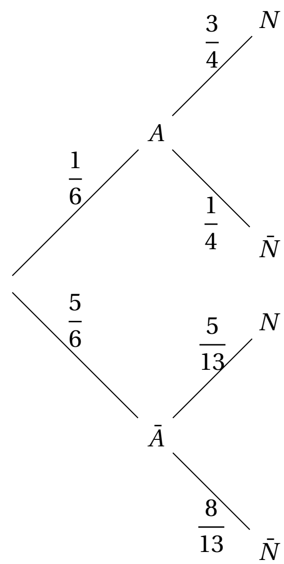
Exercice 2. **Très difficile.** Lorsque la rivière qui longe le village XXX déborde, la probabilité que la source du village soit polluée est de 0.65 le lendemain. On note Po l'événement l'eau est polluée.
Dans le cas où cette rivière déborde, un employé municipal est chargé de prélever et d'analyser un échantillon d'eau de la source.
L'analyse d'un échantillon n'est pas totalement fiable :
• dans seulement 70 % des cas, l'analyse d'un échantillon contenant de l'eau polluée indiquera que l'eau est polluée. On note T le test indique que l'eau est polluée.
• dans seulement 72 % des cas, l'analyse d'un échantillon contenant de l'eau saine indiquera que l'eau est non polluée.
1- Si l'eau contenue dans l'échantillon prélevé est déclarée non polluée par l'analyse effectuée, quelle est la probabilité que le maire se trompe en déclarant que l'eau est saine ?
On cherche $P_{\bar{T}}(Po) = \dfrac{P(\bar{T} \cap Po)}{P(\bar{T})} = \dfrac{0{,}65 \times 0{,}3}{0{,}65 \times 0{,}3 + 0{,}35 \times 0{,}72} = 0.43624161$



Pour la question 2 voir exercice 1.

Exercice 3. Moyen On dispose de 2 sacs contenant des jetons noirs et blancs :
- Il y a 18 jetons noirs et 6 jetons blancs dans le premier sac.
- Il y a 5 jetons noirs et 8 jetons blancs dans le deuxième sac.
Une personne lance un dé à 6 faces.
- Si elle obtient 1, elle tire au hasard un jeton dans le premier sac.
- Sinon elle tire au hasard un jeton dans le deuxième sac.

1. Quelle est la probabilité que le jeton tiré soit noir?
   On fait un arbre pondéré qui commence par :
   - A : Obtenir 1
   - $\bar{A}$: Ne pas obtenir 1
   Ensuite :
   - N : tirer une boule noire
   - $\bar{N}$ ne pas obtenir une boule noire.



   Donc la probabilité d'obtenir une boule noire **Sans rédaction** $P(N) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{13} \simeq 0.44551282$

2. On sait que la personne a tiré un jeton noir. Quelle est la probabilité que ce jeton ait été tiré dans le deuxième sac?
   $P_N(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap N)}{P(N)} \simeq \frac{\frac{5}{6} \times \frac{5}{13}}{0.44551282} \simeq 0.7194244$

Exercice 4. Moyen. Lors d'un vote dans une entreprise, les électeurs devaient choisir entre 5 listes. Sur les 22 bulletins, il y a :
- 3 voix pour la première liste,
- 4 voix pour la liste 2,
- 3 voix pour la liste 3,
- aucune voix pour la liste 4,
- 6 voix pour la liste 5,
- 6 votes blancs.
Quelle est la probabilité que les 5 premiers bulletins dépouillés soient dans l'ordre liste 5, liste 3, liste 5, blanc, blanc?
Soit $6 \times 3 \times 5 \times 6 \times 5 = 2700$ possibilités.
Et au total le nombre est $22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 = 3160080$ (pour 5 bulletins)
Résultat (sous forme d'une fraction) : $\frac{2700}{3160080} = \frac{1}{11704}$

Exercice 5. Moyen Même méthode que pour l'exercice précédent.

Exercice 6. Difficile. 59 % de la population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate que la proportion de vaccinés parmi les malades est de 23/45=0.51111111. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait une proportion de 23/59=0.38983051 malades parmi les vaccinés.
On a donc P(V)=0,59 , puis $P_M(V) = \frac{23}{45}$ et enfin $P_V(M) = \frac{23}{59}$.

1. Quel est le pourcentage de personnes qui ont été malades durant cette épidémie ?
   On complète d'abord le tableau en utilisant 23/59 malades parmi les vaccinés. Avec les pourcentages.

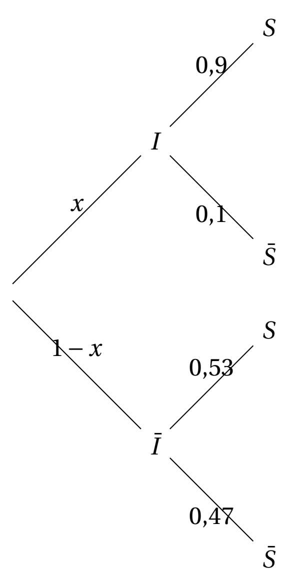
	M	$\bar{M}$	Total
V	$\frac{23}{59} \times 59 = 23$		59
$\bar{V}$			
Total :			100

   Ensuite, on utilise " la proportion de vaccinés parmi les malades est de 23/45 ".

	M	$\bar{M}$	Total
V	$\frac{23}{59} \times 59 = 23$		59
$\bar{V}$			
Total :	$\frac{45}{23} \times 23 = 45$		100

   Donc le pourcentage de personnes qui ont été malades durant cette épidémie est de 45 %.
2. En se basant uniquement sur ces informations, quelle est la probabilité de tomber malade pour une personne non vaccinée ?
   $P_{\bar{V}}(M) = \dfrac{45-23}{41} \simeq 0.5365853659$
3. Comme $0.5365 > 0.51$ il semble que le vaccin une une certaine efficacité.

Exercice 7. **Moyen à difficile.** Dans une population donnée, 90 % des victimes d'une infection virale présente un symptôme qui n'atteint que 53 % de la population non infectée. On sait de plus que 60 % de la population présente ce symptôme.
1- Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans cette population soit infecté ?
• On note S présenter le symptôme.
• On note I être infecté.
L'énoncé donne $P_I(S) = 0,9$ et $P_{\bar{I}}(S) = 0,53$. On a $P(S) = 0,6$ D'où l'arbre :



Donc $P(S) = 0,9x + (1-x)0,53 = 0,6 \Leftrightarrow 0,37x + 0,53 = 0,6 \Leftrightarrow x = \dfrac{0,07}{0,37} = P(I) \Leftrightarrow P(\bar{I}) \simeq 0,81081081$
2- Quelle est la probabilité qu'un individu présentant le symptôme soit infecté ?
La question posé est : $P_S(I) = \dfrac{P(I \cap S}{P(S)} = \dfrac{0,81081081 \times 0,9}{0,6} \simeq 0.28378379$
3- Quelle est la probabilité qu'un individu ne présentant pas le symptôme, ne soit pas infecté ?

$$P_{\bar{S}}(\bar{I}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{I}}{P(\bar{I}} = \frac{0,81081081 \times 0,47}{0,4} \simeq 0.9527027$$

Exercice 8. **Difficile.** On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats est noté Ω. On note P une probabilité sur Ω associée à cette expérience aléatoire. On s'intéresse à deux événements A et B qui ont une probabilité strictement comprise entre 0 et 1 d'être réalisés. On suppose connu : (le "c" signifie "contraire" et la "|" : "sachant")

$$p = P(B) \qquad q = P_B(A) = P(A|B) \qquad r = P(A|\bar{B}) = P_{\bar{B}}(A)$$

Donc :

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B)\times P_B(\bar{A})}{P(B\cap\bar{A})+P(\bar{B}\cap\bar{A})} = \frac{P(B)\times(1-P_B(A))}{P(B)\times P_B(\bar{A})+P(\bar{B})\times P_{\bar{B}}(\bar{A})} = \frac{p(1-q)}{p((1-q)+(1-p)(1-r)}$$

Exercice 9. **Facile.** Une entreprise dispose de deux machines pour fabriquer des pièces métalliques. Un contrôleur examine une pièce provenant de cette usine. On note
• A l'événement la pièce a un défaut,
• B l'événement la pièce a été fabriquée par la première machine.
Compléter l'assertion suivante : la probabilité que la pièce n'ait pas de défaut **et** ait été fabriquée par la 2ème machine s'écrit : (le "et" traduit ∩ et sinon ce sont deux contraires.

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})$$

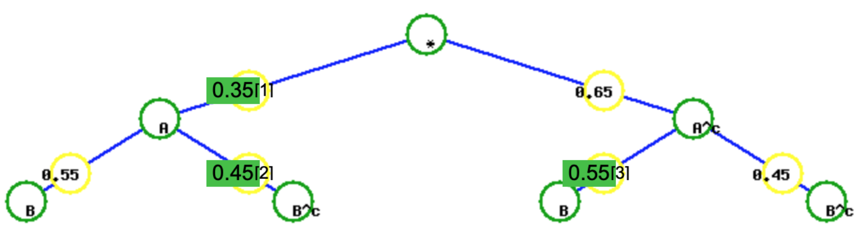
Exercice 10. **Très facile.**

Exercice 11. **Facile.** Il faut regarder les valeurs de deuxième niveau pour savoir si la boule précédente (premier niveau) a été enlevé ou non.

Exercice 12. **Facile.** Il suffit de De savoir si le tirage est avec ou sans remise.
Remarque : Si le tirage est avec remise le deuxième niveau est le même que le premier niveau.

Exercice 13. .

Voici un arbre de probabilité dans lequel interviennent deux événements A et B et leurs contraires A^c et B^c et qu'il s'agit de compléter ·

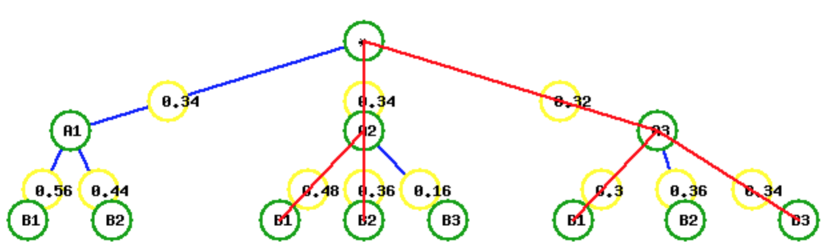


Calculer $p(A \text{ et } B^c)$: **0.1575** [4]

$$P(A\cap\bar{B}) = P(A)\times P_A(\bar{B}) = 0{,}35\times 0{,}45 = 0{,}1575$$

Exercice 14. **Facile.**

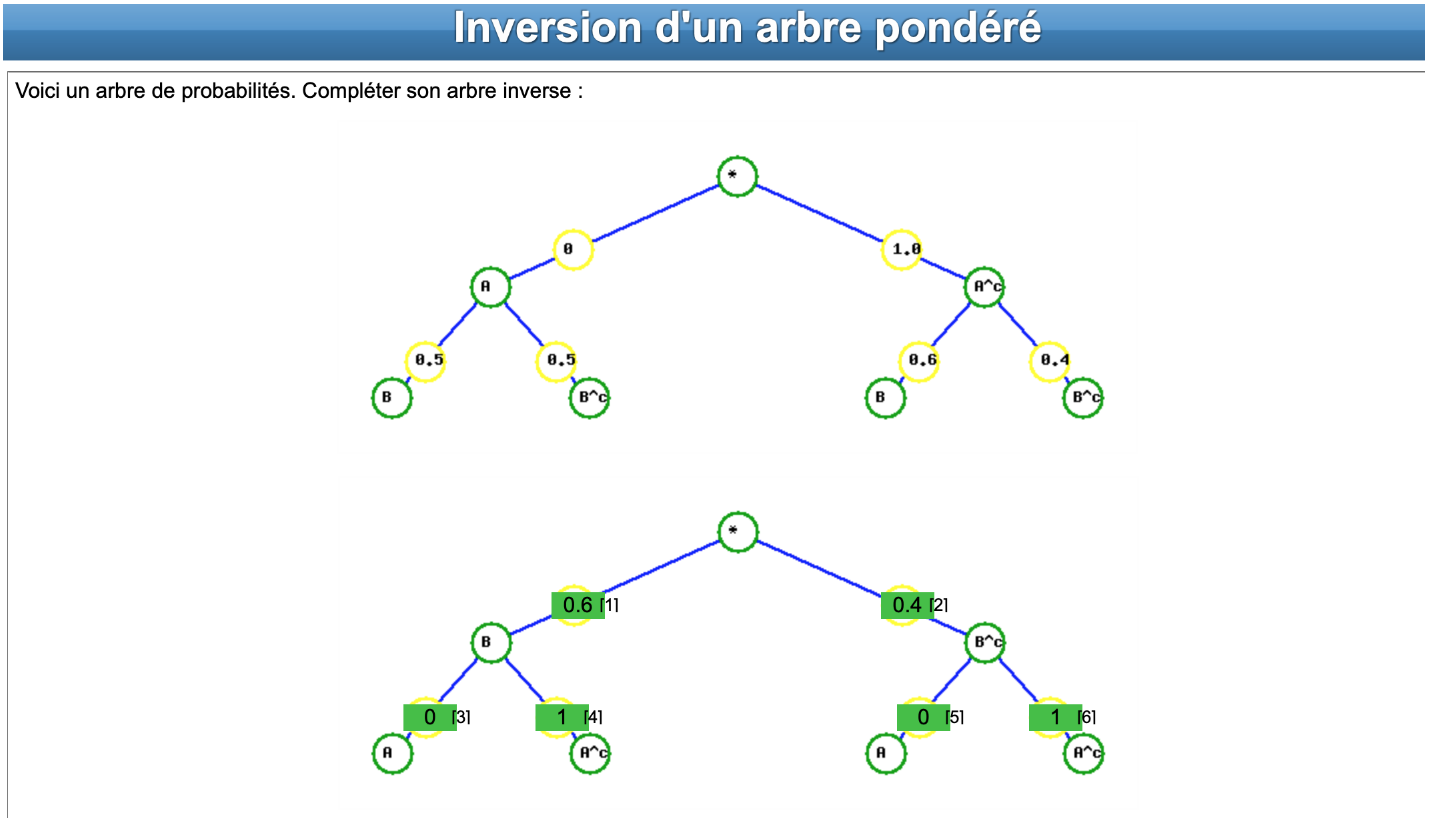
Voici un arbre pondéré de probabilités.



Écrire l'événement correspondant au chemin dessiné : $(A_2 \text{ et } B_1)$ ou $(A_2 \text{ et } B_2)$ ou $(A_3 \text{ et } B_1)$ ou $(A_3 \text{ et } B_3)$ [1]

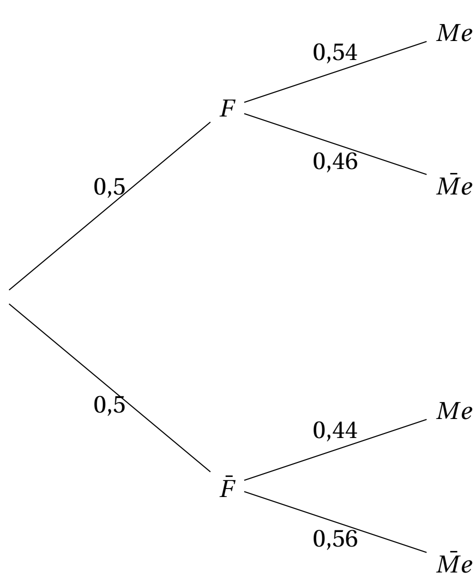
Attention : La dernière expression est une notation non autorisé de (sauf ici pour Wims) : $(A_2\cap B_1)\cup(A_2\cap B_2)\cup(A_3\cap B_1)\cup(A_3\cap B_3)$

Exercice 15. **.Facile à moyen.**



On peut se référer à la méthode 7 du Cours polycopier.
On commence par calculer $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}6 = 0{,}6$
Ensuite il nous faut : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B}{P(B)} = \dfrac{0 \times 0{,}5}{0{,}6} = 0$ et de même $P_{\bar{B}}(A) = \dfrac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{0 \times 0{,}4}{1 - 0{,}6} = 0$
Pour le reste de l'arbre est facile de compléter.

Exercice 16. **Moyen.** Un voyagiste vend des voyages en France ou hors France.
• 50.0 % des voyages se passent en France,
• parmi les voyages qui se passent en France, 54.0 % des voyages se passent à la mer;
• parmi les voyages qui se passent hors de la France, 44.0 % des voyages se passent à la mer.
Voici l'arbre :



On prend un voyage au hasard. Calculer :
• La probabilité d'avoir un voyage hors de la France et à la montagne :

$$P(\bar{F} \cap \bar{M}e) = 0{,}5 \times 0{,}56 = 0{,}28$$

• La probabilité d'avoir un voyage en France et à la montagne :

$$P(F \cap \bar{M}e) = 0{,}5 \times 0{,}46 = 0{,}23$$

• La probabilité d'avoir un voyage en France et à la mer :

$$P(F \cap Me) = 0{,}54 \times 0{,}5 = 0{,}27$$

• La probabilité d'avoir un voyage à la mer :

$$P(Me) = 0{,}5 \times 0{,}54 + 0{,}46 \times 0{,}44 = 0{,}49$$

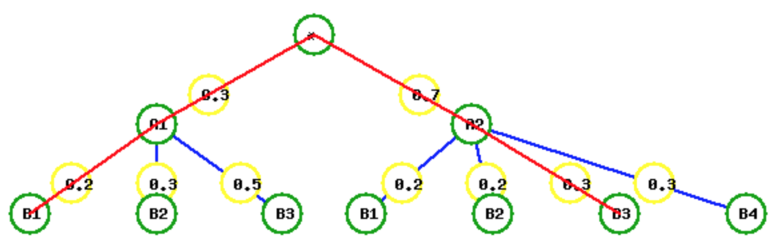
• Un voyage pris au hasard se trouve être un voyage à la mer. Calculer la probabilité qu'il soit en France :

$$P_{Me}(F) = \frac{P(F \cap Me)}{P(Me)} = \frac{0{,}5 \times 0{,}54}{0{,}49} = 0{,}551$$

Exercice 17. Facile.

Probabilité d'événements

Voici un arbre pondéré de probabilités.



Calculer la probabilité de l'événement

$$F = (A_1 \text{ et } B_1) \text{ ou} (A_2 \text{ et } B_3).$$

On doit calculer :

$$P\left((A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_3)\right) = 0.3 \times 0.2 + 0.7 \times 0.3 = 0.27$$

Exercice 18. Facile.