Activité permettant l'approximation du nombre π.

Rappel : Pour obtenir une (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = 1,12u_n - 18 \quad et \quad u_0 = 300$$

Nous pouvons obtenir les termes 10 premiers termes de cette suite à partir de l'algorithme :

$N \leftarrow 10$
$U \leftarrow 300$
Tant que $N < 10$ faire
  $U \leftarrow 1,12 \times U - 18$
  $N \leftarrow N + 1$
  Afficher U arrondi à l'entier
Fin Tant que

En Python
$N = 10$
$U = 300$
while $N < 10$:
  $U = 1,12 * U - 18$
  $N = N + 1$
  print(U)

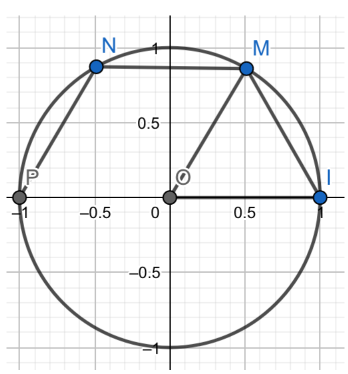
Pour programmer en même temps la somme des termes (ici nous avons choisit l'option d'obtenir les 20 premier terme et leur somme) :

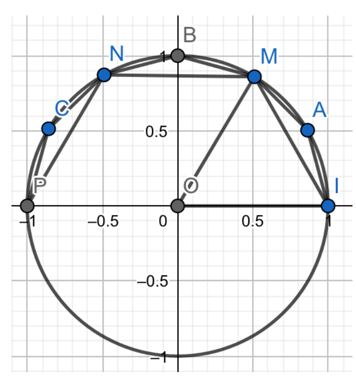
$N \leftarrow 10$
$U \leftarrow 300$
$S \leftarrow 300$
Pour n variant de 1 à n
  $U \leftarrow 1,12 \times U - 18$
  $S \leftarrow S + U$
Afficher U et S arrondi à l'entier
Fin Tant que

En Python
$N = 10$
$U = 300$
$S = 300$
for k in range(1,n+1)
  $U = 1,12 * U - 18$
  $S = S + U$
print("le nième terme est un=", U, "la somme est n premier terme est =",S)

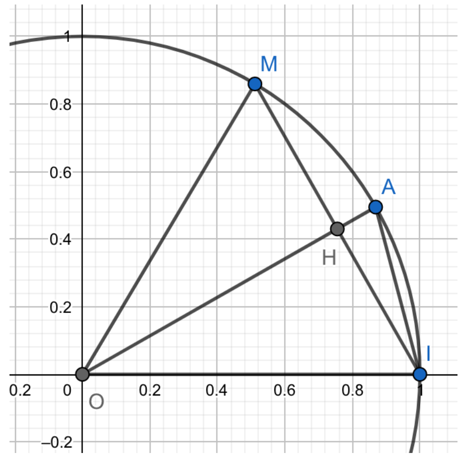
Exercice 1. Écrire les deux programmes précédent.

Exercice 2. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On veut obtenir une approximation une approximation de son demi périmètre π par les demis périmètres des polygones réguliers intérieurs à 6×2^n côtés comme ci-dessous :





La première figure nous permet d'obtenir comme approximation $\pi \simeq 3$ (Pour l'anecdote Grothendieck enfant pensait que c'était la valeur de π)
Pour déterminer la longueur de AI, nous allons allons considérer la configuration ci-dessous :



On sait que $OI = OM = 1$ et pour que le calcul soit valable à chaque étape, on posera $IM = a$ (sachant que pour $n = 0$ le polygone à 6 coté, le triangle est équilatérale, donc $a = 1$).

1. Étude théorique :
   (a) En se plaçant dans le triangle IHO, montrer que :
   $$OH = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$
   (b) En se plaçant dans le triangle AHI, montrer que :
   $$AI = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}}$$
   (c) En posant $a = 1$ déterminez AI et en déduire une nouvelle approximation de π. (on fera $AI \times 6$).
2. On peut ainsi définir une suite (a_n) par :
   $$a_0 = 1 \quad et \quad a_{n+1} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}}$$
   Écrire une procédure Python permettant d'obtenir le $n^{ième}$ terme (que vous choisirez) et ainsi une approximation de de π en le multipliant ensuite par 3×2^n.

Exercice 3. Pour chacune des approximations proposées pour π ci-dessous, écrire une procédure Python :

1. La série de Gregory-Leibniz :
   $$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$
   Vous ferez une boucle avec :
   - suite $u_k = \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$
   - La suite les sommes successives.
2. La série Madhava :
   $$\pi = \sqrt{12}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{-k}}{2k+1}$$
3. La fraction continue :
   $$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + ...}}}}$$

4. La fraction continue :

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + ...}}}}$$

5. Simon Plouffe :

$$\pi + 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n!)^2}{(2n)!}$$

Ici le ! signifie par exemple : $10! = 1 \times 2 \times ... \times 10$. On pourra donc définir avant une fonction factoriel. Pour définir une fonction avec Python cherchez sur internet. (def fact(n) : ....

6. Archimède, dans De la mesure du cercle, a créé le premier algorithme pour le calcul de π, basé sur l'idée que le périmètre de n'importe quel polygone inscrit dans un cercle est inférieur à la circonférence du cercle qui, à son tour, est inférieur que le périmètre de tout polygone circonscrit à ce cercle. Il a commencé par des hexagones réguliers inscrits et circonscrits, dont les périmètres sont facilement déterminés. Il montre alors comment calculer les périmètres des polygones réguliers ayant deux fois plus de côtés qui sont inscrits et circonscrits autour du même cercle. Il s'agit d'une procédure récursive qui serait décrite aujourd'hui comme suit :

   Soit p_k et P_k les périmètres de polygones réguliers à k côtés, inscrits et circonscrits autour du même cercle, respectivement. Alors,

$$P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} \qquad et \qquad p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$$