EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

Partie A

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f, le nombre de malades durant l'épidémie.
Cette fonction f est définie sur $[1 ; 26]$ par :

$$f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[1 ; 26]$, $f'(t) = 24\ln(t) - 6t + 24$.
2. Les variations de la fonction f' sont données dans le tableau suivant :

   $f'(t)$ 24 26

   a. Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet, dans l'intervalle $[1 ; 26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.

   b. En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1 ; 26]$ et les variations de f sur $[1 ; 26]$.
3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

   a. Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur $[4 ; 26]$, f' est décroissante. »

   b. À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Partie B

On admet que la fonction G définie par :

$$G(t) = 12t^2\ln(t) - 6t^2$$

est une primitive sur $[1 ; 26]$ de la fonction g définie par : $g(t) = 24t\ln(t)$.

1. Déterminer, sur $[1 ; 26]$, une primitive F de la fonction f.
2. On a trouvé que l'arrondi à l'entier de $\dfrac{1}{26-1}\left[F(26) - F(1)\right]$ est 202. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte du problème.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On étudie l'évolution de la population d'une ville, depuis le 1er janvier 2008.

Partie A : un premier modèle

Pour cette partie, on admet que la population augmente de 3,5 % par an depuis le 1er janvier 2008.

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la population entre le 1er janvier 2008 et le 1er janvier 2014. Donner une réponse à 0,1 % près.
2. À partir de 2008, on modélise la population de cette ville au 1er janvier à l'aide d'une suite :

   Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants, exprimé en centaines de milliers d'habitants, au 1er janvier de l'année $2008 + n$.

   Au 1er janvier 2008, cette ville comptait 100 000 habitants.

   a. Que vaut u_0 ?

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1,035^n$.

   c. Suivant ce modèle, en quelle année la population aura-t-elle doublé ? Justifier la réponse.

Partie B : un second modèle.

On modélise la population de cette ville à partir du 1er janvier 2008 par la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1 + 2\mathrm{e}^{-0,05x}}$$

où x désigne le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2008 et $f(x)$ le nombre d'habitants en centaines de milliers.
On admet que f est croissante sur $[0~;~+\infty[$.

On considère l'algorithme suivant :

Initialisation :	X prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $f(X) \leqslant 2$
	X prend la valeur $X + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

Si l'on fait fonctionner cet algorithme, alors le résultat affiché en sortie est 28. Interpréter ce résultat dans le contexte de ce problème.