Interrogation du 2 avril.

Énoncé 1 :

a. Déterminer les solutions de l'équation différentiel : $E_0 :\ 3y' + 5y = 0$

b. Déterminer une solution particulière sous la forme $(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ de l'équation différentiel : $E :\ 3y' + 5y = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$.

c. Déduire des deux questions précédentes la forme des solutions de l'équation $E :\ 3y' + 5y = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$.

d. Déterminer la solution de E telle que $y(0) = 3$.

Correction :

a. Déterminer les solutions de l'équation différentiel : $E_0 :\ 3y' + 5y = 0 \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R},\quad y\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K\mathrm{e}^{\frac{-5}{3}x} \end{array}$

b. Déterminer une solution particulière sous la forme $(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ de l'équation différentiel : $E :\ 3y' + 5y = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$.

On pose $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$. Si f solution de E, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } E &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 3f'(x) + 5f(x) = 3a\mathrm{e}^{-x} - 3(ax+b)\mathrm{e}^{-x} + 5(ax+b)\mathrm{e}^{-x} = (2ax+3a+2b)\mathrm{e}^{-x} = (2x+3)\mathrm{e}^{-x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (2ax+3a+2b) = (2x+3) \\ &\Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = 0 \end{aligned}$$

On note $y_0\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\mathrm{e}^{-x} \end{array}$.

c. Déduire des deux questions précédentes la forme des solutions de l'équation $E :\ 3y' + 5y = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned} y \text{ solution de E } &\Leftrightarrow 3y' + 5y = (2x+3)\mathrm{e}^{-x} = 3y_0'(x) + 5y_0(x) \\ &\Leftrightarrow 3(y - y_0)'(x) + 5(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow y - y_0 \text{ solution de } \ E_0 \\ &\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ y - y_0(x) = K\mathrm{e}^{\frac{-5}{3}x} \\ &\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R},\quad y\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K\mathrm{e}^{\frac{-5}{3}x} + x\mathrm{e}^{-x} \end{array} \end{aligned}$$

d. Déterminer la solution de E telle que $y(0) = 3$.

$$y(0) = 3 \Leftrightarrow K = 3$$

La solution cherchée est $y\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3\mathrm{e}^{\frac{-5}{3}x} + x\mathrm{e}^{-x} \end{array}$

Énoncé 2 :

a. Montrer que A définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \ln(x^2+1)$ est une primitive de a définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ a(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

b. Montrer que la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ (où $C \in \mathbb{R}$) est solution de l'équation différentielle

$$Q : (1+x^2)y' + 2xy = 0$$

c. Simplifier l'expression $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ et trouver une solution de Q vérifiant $y(0) = 3$.

Correction :

a. Montrer que A définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \ln(x^2+1)$ est une primitive de a définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ a(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

La dérivée de $\ln u$ est $\dfrac{u'}{u}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ A'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} = a(x)$

b. Montrer que la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ (où $C \in \mathbb{R}$) est solution de l'équation différentielle

$$Q : (1+x^2)y' + 2xy = 0$$

On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$.

$$(1+x^2)f'(x) + 2xf(x) = -(1+x^2)A'(x)C\mathrm{e}^{-A(x)} + 2xC\mathrm{e}^{-A(x)} = C\mathrm{e}^{-A(x)}\left[\underbrace{-a(x)(1+x^2) + 2x}_{0}\right] = 0$$

c. Simplifier l'expression $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ et trouver une solution de Q vérifiant $y(0) = 3$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)} = C\mathrm{e}^{-\ln(1+x^2)} = \dfrac{C}{1+x^2}$, donc :

$$y(0) = 3 = \frac{C}{1+0^2} = C$$

Une solution de Q avec $y(0) = 3$ est $y\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3}{1+x^2} \end{array}$.