Correction du bac blanc 2019 au lycée Paul Rey.

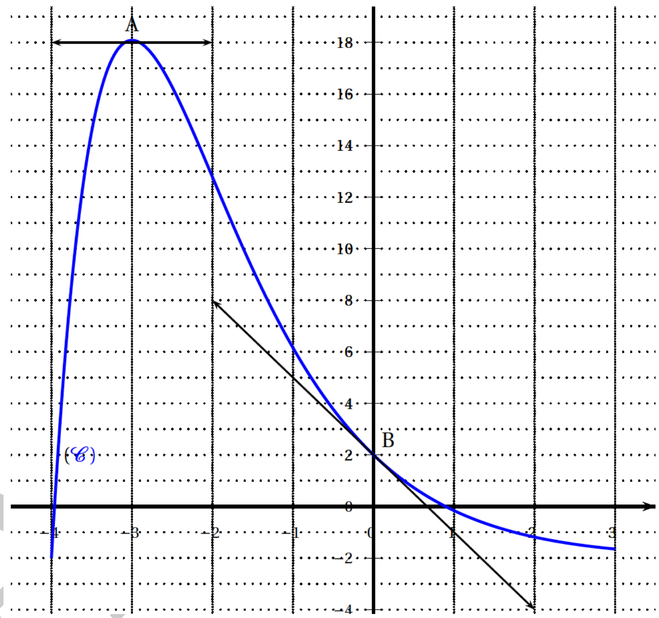
EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$. Les points A d'abscisse -3 et B(0; 2) sont sur la courbe $(\mathscr{C})$.

Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.

Le point C de $(\mathscr{C})$ d'abscisse -2 (non représenté sur la figure) est un point d'inflexion de $(\mathscr{C})$.



Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Par lecture graphique, déterminer en justifiant :

1. $f'(-3) = 0$: la tangente étant horizontal, le coefficient directeur est nul. ;
2. $f(0) = 2$ les coordonnées de B sont $(0,2)$ est $B \in (\mathscr{C})$ et $f'(0) = -3$, le coefficient directeur de la tangente en B est -3.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par

$$f(x) = -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que, pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$, $f'(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4\ ;\ 3]$:

$$f'(x) = 0 + 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+4) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (1 - x - 4)\mathrm{e}^{-x} = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$$

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, alors $f'(x)$ est du signe de $-x-3$. On a : $-x-3 > 0 \Leftrightarrow -3 > x$ D'où le tableau de variation :

x	-4		-3		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$-2+\mathrm{e}^3$	$\searrow$	$-2+7\mathrm{e}^{-3}$

En effet :

$$f(-4) = -2 + (-4+4)\mathrm{e}^4 = -2 \quad ; \quad f(-3) = -2 + (-3+4)\mathrm{e}^3 = -2 + \mathrm{e}^3 \simeq 18 \quad ; \quad f(3) = -2 + 7\mathrm{e}^{-3}$$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3 ; 3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

D'après le tableau de variation l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3, 3]$. On a :

x	0,89	0,9
$f(x)$	0,0081	-0,007

Donc on a $0,89 \leq \alpha \leq 0,9$

3. Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ au point C d'abscisse -2.

$$f(-2) = -2 + (-2+4)\mathrm{e}^2 = -2 + 2\mathrm{e}^2 \quad et \quad f'(-2) = (2-3)\mathrm{e}^2 = -\mathrm{e}^2$$

Donc l'équation de $(\mathcal{T})$ est :

$$y = -\mathrm{e}^2(x+2) - 2 + \mathrm{e}^2 = -\mathrm{e}^2 x - 2 - \mathrm{e}^2$$

4. Étude algébrique de la convexité.

a. Montrer que :

$$f''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-3) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

b. Étudier le signe de f'' et en déduire la convexité de f sur $[-4 ; 3]$, ainsi que la position relative de $(\mathcal{T})$ et de $(\mathcal{C})$.

Puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$ alors $f''(x)$ est du signe de $x+2$.

x	-4		-2		3
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité		*concave*	0	*convexe*	

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

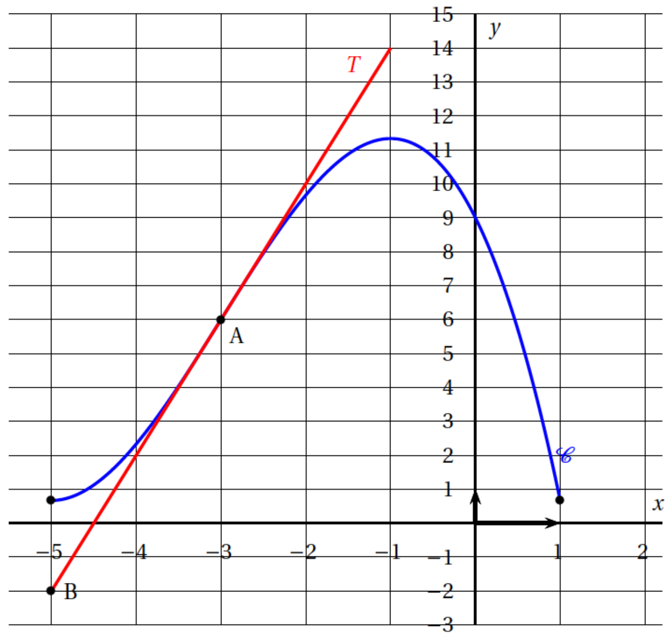
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question posée, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Recopier sur ***la copie simple*** *prévu à cet effet, le numéro de la question et indiquer la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

Partie A :

On a représenté dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-5\,;\,1]$.

La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A$(-3\,;\,6)$ et passe par le point $(-5\,;\,-2)$.

Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[-5\,;\,1]$.



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Alors : $f'(-3) = 4$

A. $f'(-3) = 6$ **B.** $f'(-3) = 4$ **C.** $f'(-3) = \dfrac{1}{4}$ **D.** $f'(-3) = \dfrac{1}{6}$

2. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. Alors : $f''(-3) = 0$

A. $f''(-3) = 6$ **B.** $f''(-3) = 4$ **C.** $f''(-3) = 0$ **D.** $f''(-3) = \dfrac{1}{4}$

3. La fonction f est : convexe sur $[-5\,;\,-3]$.

A. convexe sur $[-5\,;\,-3]$ **B.** convexe sur $[-5\,;\,-1]$
C. convexe sur $[-3\,;\,1]$ **D.** concave sur $[-5\,;\,1]$

4. La fonction dérivée f' est : décroissante sur $[-3\,;\,-1]$.

A. décroissante sur $[-3\,;\,-1]$ **B.** croissante sur $[-3\,;\,-1]$
C. croissante sur $[-1\,;\,1]$ **D.** croissante sur $[-5\,;\,-1]$

Partie B :

5. On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 3]$.
Dans l'intervalle $[-1 ; 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet : exactement 2 solutions

a. exactement 3 solutions
b. exactement 2 solutions
c. exactement 1 solution

x	-1		1		2		3
variations de f			2				$-0,5$
		↗		↘		↗	
	-2				-1		

6. L'équation $e^{2x-5} = e$, admet une unique solution x_0 sur $\mathbb{R}$. On a : $x_0 = 3$.

a. $x_0 = 0$ **b.** $x_0 = 2$ **c.** $x_0 = 3$ **d.** $x_0 = -3$

7. La suite (u_n) est géométrique de 1^{ier} terme $u_1 = 3$ et de raison $q = 0,8$, alors : $u_n = 3 \times 0,8^{n-1}$.

a. $u_n = 3 \times 0,8^n$ **b.** $u_n = 3 + 0,8n$
c. $u_n = 3 \times 0,8^{n-1}$ **d.** $u_n = 3 + 0,8(n-1)$

8. On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables :	n est un nombre entier naturel
	U est un nombre réel
Traitement :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à U la valeur 50
	Tant que $U < 120$ faire
	U prend la valeur $1,2 \times U$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

En fin d'exécution, cet algorithme affiche la valeur : 5.

a. 4 **b.** 124,416 **c.** 5 **d.** 96

EXERCICE 3 **5 points**

Exercice pour les candidats n'ayant pas suivit la spécialité.

Début 2013, la superficie totale des forêts sur la terre représente un peu plus de 4 milliards d'hectares.

Au cours de l'année 2013, on estime qu'environ 16 millions d'hectares ont été détruits.

Des plantations d'arbres et une expansion naturelle des forêts ont ajouté 10,2 millions d'hectares de nouvelles forêts en 2013.

1. La superficie totale des forêts détruites au cours de l'année 2013 représente une proportion de $\dfrac{16}{4\,000} = 0{,}004$; ce qui fait un pourcentage de 0,4 %.

On admet dans la suite que chaque année, la proportion des surfaces détruites de forêts et la superficie de nouvelles forêts restent constantes.

On note u_n la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre au début de l'année $(2013+n)$ avec $u_0 = 4\,000$.

2. a. L'année 2014 correspond à $n = 1$ donc la superficie de forêt en début de 2014 est :
$u_1 = (1-0{,}004)\,u_0 + 10{,}2 = 0{,}996u_0 + 10{,}2 = 0{,}996 \times 4\,000 + 10{,}2 = 3\,994{,}2$ millions d'hectares.

b. Si 0,4 % de forêt est détruite chaque année, il en reste 99,6 % ; donc on multiplie la surface de forêt l'année n par 0,996 pour avoir la surface de forêt l'année $n+1$. Comme de plus on plante chaque année 10,2 millions d'hectares, on aura, pour tout n, $u_{n+1} = 0{,}996u_n + 10{,}2$.

3. Soit (d_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $d_n = u_n - 2\,550$; donc $u_n = d_n + 2\,550$.

a. $d_{n+1} = u_{n+1} - 2\,550 = 0{,}996u_n + 10{,}2 - 2\,550 = 0{,}996\,(d_n + 2\,550) - 2\,539{,}8$
$= 0{,}996u_n + 2\,539{,}8 - 2\,539{,}8 = 0{,}996d_n$

b. $d_0 = u_0 - 2\,550 = 1\,450$
Donc la suite (d_n) est géométrique de premier terme $d_0 = 1\,450$ et de raison $q = 0{,}996$.

c. De la nature de la suite (d_n) on déduit que, pour tout n, $d_n = d_0 \times q^n = 1\,450 \times 0{,}996^n$.
Comme $u_n = d_n + 2\,550$, on en déduit que, pour tout n, $u_n = 1\,450 \times 0{,}996^n + 2\,550$.

4. a. On considère l'algorithme suivant :

U prend la valeur 4 000
N prend la valeur 0
Tant que $U \leqslant 3\,970$
U prend la valeur $0{,}996 \times U + 10{,}2$
N prend la valeur $N+1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

Le tableau ci-dessous traduit l'exécution pas à pas de l'algorithme.

Recopier et compléter ce tableau en arrondissant les valeurs de U à l'unité :

Valeur de U	4 000	3 994,2	3 988,4	3 982,7	3 976,9	3 971,2	3 965,5
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Condition $U < 3\,970$	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	faux

b. À partir de quelle année la superficie des forêts présentes sur la Terre sera inférieure à 3,97 milliards d'hectares ? Préciser la démarche utilisée.
Au vue du tableau précédent, la superficie de la forêt sera inférieur à 3,97 milliards d'hectares en 2019.

EXERCICE 4 **5 points**

Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance.

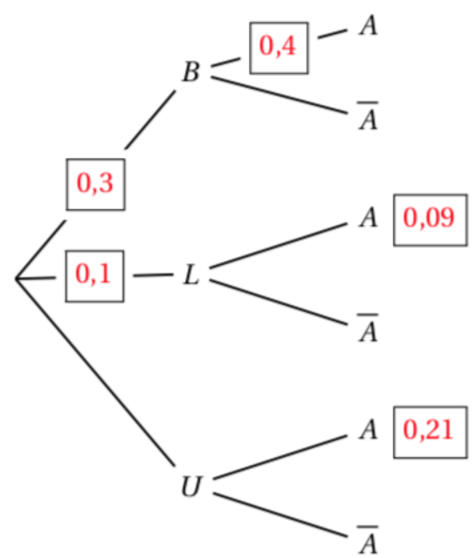
Une étude statistique a permis d'établir que :

- 30 % des clients ont loué une berline et 10 % ont loué un véhicule de luxe.
- 40 % des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance.
- 9 % des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance.
- 21 % des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance.

On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les évènements suivants :

- B : le client a loué une berline.
- L : le client a loué un véhicule de luxe.
- U : le client a loué un véhicule utilitaire.
- A : le client a choisi l'option d'assurance.

1. Avec les données de l'énoncé, on peut dire que :
$P(B) = 0,3$, $P_B(A) = 0,4$, $P(L) = 0,1$, $P(L \cap A) = 0,09$ et $P(U \cap A) = 0,21$.
On place ces résultats dans l'arbre :



2. L'évènement « le client a loué une berline et a choisi l'option d'assurance sans franchise » est l'évènement $B \cap A$.
D'après l'arbre : $P(B \cap A) = P(B) \times P_B(A) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$.

3. Calculer la probabilité qu'un client ait choisi l'option d'assurance sans franchise.
On cherche $P(A)$; d'après la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(B \cap A) + P(L \cap A) + P(U \cap A) = 0,12 + 0,09 + 0,21 = 0,42$.

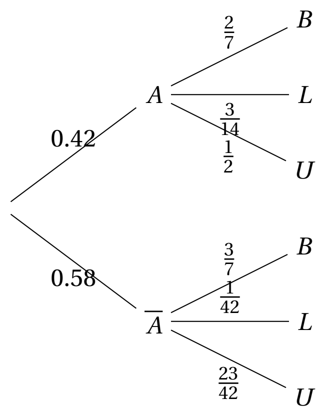
4. $P_L(A) = \dfrac{P(L \cap A)}{P(L)} = \dfrac{0,09}{0,1} = 0,9$.

5. **(Bonus)** Pour cette question toute forme de recherche sera valorisé. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous (vous justifierez vos résultats) :
$P(A) = 0,42 \quad donc \quad P(\overline{A}) = 0,58$
Ensuite :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,42} = \frac{2}{7} \quad \text{puis} \quad P_A(L) = \frac{P(A \cap L)}{P(A)} = \frac{0,09}{0,42} = \frac{3}{14} \quad \text{enfin} \quad P_A(U) = 1 - \frac{2}{7} - \frac{3}{14} = \frac{1}{2}$$

Puis :

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,3 \times 0,6}{0,42} = \frac{3}{7} \quad \text{puis} \quad P_{\overline{A}}(L) = \frac{P(\overline{A} \cap L)}{P(\overline{A})} = \frac{0,01}{0,42} = \frac{1}{42} \quad \text{enfin} \quad P_{\overline{A}}(U) = 1 - \frac{3}{7} - \frac{1}{42} = \frac{23}{42}$$


0.42
0.58
A
$\overline{A}$
B
L
U
B
L
U
2/7
3/14
1/2
3/7
1/42
23/42