Bac blanc 2021 : Spécialité Mathématiques corrigé.

EXERCICE 1 **5 points**

PARTIE A

Par lecture graphique, déterminer en justifiant :

1. $f'(-3) = 0$: la tangente étant horizontal, le coefficient directeur est nul. ;
2. $f(0) = 2$ les coordonnées de B sont $(0,2)$ est $B \in (\mathscr{C})$ et $f'(0) = -3$, le coefficient directeur de la tangente en B est -3.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par

$$f(x) = -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+4) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x} = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}(x+4) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x} = 0\end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{FI mais croissance comparée}} \lim\limits_{x\to+\infty}(x+4)\mathrm{e}^{-x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x} = -2$$

2. Justifier que, pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$, $f'(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4\ ;\ 3]$:

$$f'(x) = 0 + 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+4) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (1-x-4)\mathrm{e}^{-x} = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$$

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, alors $f'(x)$ est du signe de $-x-3$. On a : $-x-3 > 0 \Leftrightarrow -3 > x$ D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2+\mathrm{e}^3$	$\searrow$	-2

En effet :

$$f(-4) = -2 + (-4+4)\mathrm{e}^4 = -2 \quad ; \quad f(-3) = -2 + (-3+4)\mathrm{e}^3 = -2 + \mathrm{e}^3 \simeq 18 \quad ; \quad f(3) = -2 + 7\mathrm{e}^{-3}$$

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3\ ;\ 3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.
D'après le tableau de variation l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3,3]$. On a :

x	0,89	0,9
$f(x)$	0,0081	-0,007

Donc on a $0,89 \leq \alpha \leq 0,9$

4. Déterminer l'équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à $(\mathscr{C})$ au point C d'abscisse -2.

$$f(-2) = -2 + (-2+4)\mathrm{e}^2 = -2 + 2\mathrm{e}^2 \quad et \quad f'(-2) = (2-3)\mathrm{e}^2 = -\mathrm{e}^2$$

Donc l'équation de $(\mathscr{T})$ est :

$$y = -\mathrm{e}^2(x+2) - 2 + 2\mathrm{e}^2 = -\mathrm{e}^2 x - 2$$

5. Étude algébrique de la convexité.
   a. Montrer que :

$$f''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-3) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

   b. Étudier le signe de f'' et en déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que la position relative de $(\mathscr{T})$ et de $(\mathscr{C})$.
   Puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$ alors $f''(x)$ est du signe de $x+2$.

x	-4		-2		3
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité		*concave*	0	*convexe*	
Position		$\mathscr{T}/\mathscr{C}$	0	$\mathscr{C}/\mathscr{T}$	

6. Utilisation de la convexité de la fonction.

a. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0.

$$T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) = -3x+2$$

b. Comme la fonction f est concave sur $[-2, +\infty[$, la tangente en 0 est au dessous de $\mathscr{C}$ donc :

$$\forall x \in [-2, +\infty[, -3x+2 \leqslant -2+(x+4)\text{e}^{-x}$$

c. Soit $x \in [-2, +\infty[$

$$-3x+2 \leqslant -2+(x+4)\text{e}^{-x} \Leftrightarrow -3x+4 \leqslant (x+4)\text{e}^{-x} \underbrace{\Leftrightarrow}_{x+4>0 \text{ sur } [-2,+\infty[} \frac{-3x+4}{x+4} \leqslant \text{e}^{-x}$$

Exercice 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.

Avec $a = 2,9$ il semble que la suite (u_n) soit décroissante et convergente vers 1.

Avec $a = 3,1$ il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

a. En remarquant que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$, montrer que $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$.

Si $u_n \to \ell$ alors $u_{n+1} \to \ell$ et par ailleurs comme f est continue $f(u_n) \to f(\ell)$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ alors $f(\ell) = \ell$ donc $\ell = \frac{1}{2}\ell - \ell + \frac{3}{2}$.

b. Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3. $\ell = \frac{1}{2}\ell - \ell + \frac{3}{2} \iff 2\ell = \ell^2 - 2\ell + 3 \iff \ell^2 - 4\ell + 3 = 0 \iff (\ell - 1)(\ell - 3) = 0 \iff \ell = 1 \text{ ou} \ell = 3$

1 et 3 sont les solutions de cette équation que l'on peut écrire.

Si elle converge cela ne peut être que vers 1 ou 3.

3. Dans cette question, on prend $a = 2,9$.

a. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

On prend $a = 2,9$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = x - 1$; donc $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$: la fonction f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Initialisation : $u_0 = 2,9$ et u_1 : $\frac{1}{2} \times 2,9^2 - 2,9 + \frac{3}{2} = 2,805$.

On a bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$:

puisque la fonction f est croissante sur $[1 ; +\infty[$, les images par f des trois termes de cet encadrement sont rangées dans le même ordre :

$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.

Soit avec $f(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1$: $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang n, il l'est aussi au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence on a donc démontré que :

pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

c. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

D'après le résultat précédent la suite (u_n) décroit et est minorée par 1 : elle est donc, d'après le théorème de la convergence monotone, convergente vers un nombre $\ell \geqslant 1$.

De plus $a = 2,9$ est le premier terme de la suite qui est décroissante, donc $\ell < 2,9$.

Les deux seules valeurs possibles pour la limite sont 1 et 3 (question 2.b.) ; ça ne peut pas être 3 donc $\ell = 1$.

4. Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.

a. À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

Si la suite est majorée, comme elle est croissante, elle est convergente (théorème de la convergence monotone).

On a vu que si la suite converge ce ne peut être que vers 1 ou 3, ce qui n'est pas possible puisque le premier terme est $u_0 = 3,1 > 3$ et que la suite est croissante : cette suite n'est donc pas majorée.

b. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Par conséquent on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c. L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p > 10^6$.

P est un nombre entier et U est un nombre réel.

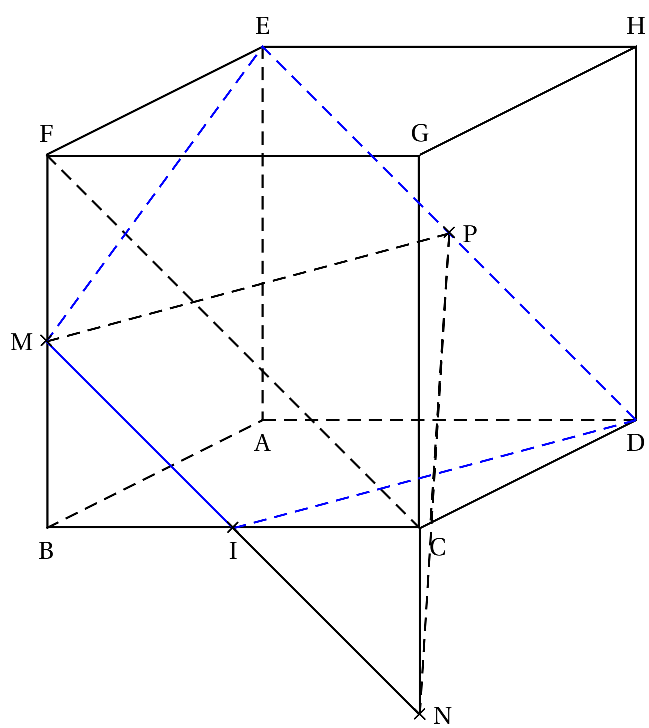
$P \leftarrow 0$
$U \leftarrow 3,1$
 	
Tant que $U \leqslant 10^6$
    $P \leftarrow P + 1$
    $U \leftarrow \dfrac{1}{2}U^2 - U + \dfrac{3}{2}$
Fin Tant que

Rem. L'algorithme s'arrête à u_9.

EXERCICE 3 **4 points**

On considère un cube ABCDEFGH.

Le point M est le milieu de [BF], I est le milieu de [BC], le point N est défini par la relation $\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ et le point P est le centre de la face ADHE.



Partie A :

1. Justifier que la droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu I.

On a $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{NC}$ donc le quadrilatère BMCN est un parallélogramme donc droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu I (les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

2. Construire, sur la figure la section du cube par le plan (MNP).

Partie B :

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

   Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\0\end{pmatrix}$. Or

   $$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MN} = 1\times 0+2\times 1-2\times 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MP} = -1+1+0 = 0$$

   Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan MNP est un vecteur normal à ce plan.
   En déduire une équation cartésienne du plan (MNP).
   On sait qu'alors :
   $M(x\,;\,y\,;z) \in (\text{MNP}) \iff 1x+2y+2z+d=0.$
   En particulier on a :
   $\text{P} \in (\text{MNP}) \iff 1\times 0+2\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{2}+d=0 \iff 1+1+d=0 \iff d=-2.$
   Conclusion : $M(x\,;\,y\,;z) \in (\text{MNP}) \iff x+2y+2z-2=0.$
2. Montrer que le point K de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de G sur le plan (MNP)
   En déduire la distance de G à (MNP).
   On a $\overrightarrow{KG}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{n}=3\overrightarrow{KG}$ donc $\overrightarrow{KG}$ est normal à (MNP). Par ailleurs $\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{1}{3}-+2\times\dfrac{1}{3}-2=0$ donc $K\in(MNP)$. Donc K est bien le projeté orthogonal de G sur (MNP).
   $KG=\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}}=1$ qui est la distance de G à (MNP).
3. Distance de P à (MI).
   a. Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par P et orthogonal à la droite (MI).
   On a $\overrightarrow{MI}:\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $\mathscr{P}: y-z+d=0$ avec $P:\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ donc $d=0$ donc $\mathscr{P}: y-z=0$
   Une représentation paramétrique de (MI) : $\begin{cases} x=1\\ y=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\\ z=-\frac{1}{2}t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ Pour trouver l'intersection : $\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t=0 \Leftrightarrow t=\frac{-1}{2}$ Donc $H\left(1;\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$
   b. Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (MI) avec le plan $\mathscr{P}$.
   c. En déduire la distance de P à la droite (MI). (Penser à justifier)
   Par construction H est le projeté orthogonal de P sur (MI), donc la distance de P à (MI) est :

   $$\overrightarrow{PH}:\begin{pmatrix}1\\-1/4\\-1/4\end{pmatrix} \Rightarrow PH=\sqrt{1^2+1/4^2+1/4^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

4. Étude du quadrilatère $(EDIM)$.
   a. Justifier que les droites (ED) et (MI) sont parallèles et en déduire que les quatre points M, E, D et I sont coplanaires.
   Par le théorème des milieux, on a $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{MI}$ or $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{ED}$. Donc $\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{MI}$. Les droites (ED) et (MI) sont donc parallèles et donc coplanaires. Donc M, E, D et I sont coplanaires.
   b. En déduire que l'aire du quadrilatère (MEDI) est $\dfrac{9}{8}$ unités d'aire. $Aire=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{4}=\dfrac{9}{8}$
   c. Calculer le volume de la pyramide GMEDI. $V_{(\text{GMEDI})}:\dfrac{1}{3}\mathscr{A}(\text{AEDI})\times\text{GK}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{8}\times 1=\dfrac{3}{8}$ unité de volume.

EXERCICE 4 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

PARTIE I

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 98 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.

Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.

Déterminer la loi suivit par X.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

a. 0 **b.** 0,16 **c.** 0,83 **d.** 1

$$P(X=0)=0,98^9 \simeq 0,83 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

2. La probabilité que exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

a. $\binom{7}{2}\times 0,98^2\times 0,02^7$ **b.** $\binom{9}{2}\times 0,98^2\times 0,02^7$ **c.** $\binom{7}{2}\times 0,98^7\times 0,02^2$ **d.** $\binom{9}{2}\times 0,98^7\times 0,02^2$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times(1-p)^{n-k}\times p^k \qquad \text{donc} \qquad P(X=2)=\binom{9}{2}\times 0,98^7\times 0,02^2$$

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

a. $1-P(X=0)$ **b.** $P(X\geqslant 2)$ **c.** $P(X\leqslant 1)$ **d.** $P(X<1)$

La probabilité cherchée est : $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 2 boules blanches, indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne. On considère les évènements suivants :

— V_1 : la première boule tirée est verte ;
— B_1 : la première boule tirée est blanche ;
— V_2 : la seconde boule tirée est verte ;
— B_2 : la seconde boule tirée est blanche

4. La probabilité de l'événement V_2 est égale à :

a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{3}{28}$ **d.** $\frac{9}{7}$

$$P(V_2)=P(V_1\cap V_2)+P(B_1\cap V_2)=P(V_1)\times P_{V_1}(V_2)+P(B_1)\times P_{B_1}(V_2)==\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{30}{42}=\frac{5}{7}$$

5. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_2}(V_1)$, est égale à :

a. $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{4}{7}$ **c.** $\frac{2}{7}$ **d.** $\frac{5}{6}$

$$P_{V_2}(V_1)=\frac{P(V_1\cap V_2)}{P(V_2)}=\frac{P(V_1)\times P_{V_1}(V_2)}{P(V_2)}=\frac{\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{3}$$