BAC blanc 2020 Lycée Paul Rey, correction.

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.

On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\text{e}^{-0,1t}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\ \mu$g.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
   Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.
2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}.
   Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

Partie B : administration par voie orale

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.

Le modèle mathématique est : $g(t) = 20\left(\text{e}^{-0,1t} - \text{e}^{-t}\right)$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0\ \mu$g.L^{-1}.

1. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :
$$g'(t) = 20\text{e}^{-t}\left(1 - 0,1\text{e}^{0,9t}\right)$$
2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)
   En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.

Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20μg.L^{-1}.

On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.

Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.

On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20μg.L^{-1}, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L-$^{-1}$.
   Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   a. $\mathrm{j}^3 = 1$;
   b. $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC.
3. Démontrer l'égalité : $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 **5 points**

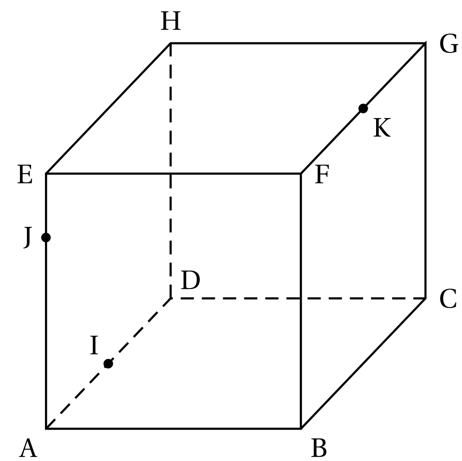
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.

Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD] ;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$;
- K est le milieu du segment [FG].



1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

Partie B

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse inexacte ou non justifiée ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3x-4)\mathrm{e}^{-2x}$

   Affirmation 1 : la dérivée de cette fonction est : $f'(x) = (3x-1)\mathrm{e}^{-2x}$

2. En 2016, en France, les forces de l'ordre ont réalisé $9,8$ millions de dépistages d'alcoolémie auprès des automobilistes, et $3,1$ % de ces dépistages étaient positifs.

   Source : *OFDT (Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies)*

   Dans une région donnée, le 15 juin 2016, une brigade de gendarmerie a effectué un dépistage sur 200 automobilistes.

   Affirmation 2 : en arrondissant au centième, la probabilité que, sur les 200 dépistages, il y ait eu strictement plus de 5 dépistages positifs, est égale à $0,59$.

3. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x).$$

   Affirmation 3 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Partie A - Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,005$, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est $0,6$.

On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.

On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation.

On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

On appelle X_n la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.

L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Calculer a_1 puis b_1 et montrer que $a_2 = 0{,}993\,025$ et $b_2 = 0{,}006\,975$.
2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n A$.
   A est appelée matrice de transition dans le milieu 1.
   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 A^n$.
3. On définit la matrice P par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$.
   On admet que P est inversible et que
   $$P^{-1} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel n,
   $$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120\left(1 - 0,395^n\right) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix}.$$
   En déduire une expression de a_n en fonction de n.
6. Déterminer la limite de la suite (a_n). Conclure.

Partie B - Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,01$.

1. Donner, en fonction de a, la matrice de transition M dans le milieu 2.
2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %.
   On admet qu'il existe un unique vecteur X, appelé état stationnaire, tel que $XM = X$, et que $X = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la valeur de a.

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

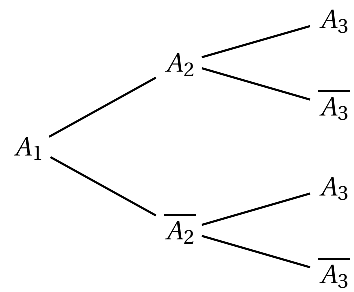
— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p\left(A_1\right) = 1$.

1. a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.

   b. Démontrer que $p\left(A_3\right) = 0,85$.

   c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?
   Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P\left(A_n\right)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.

   b. Démontrer que la suite $\left(p_n\right)$ est décroissante.

   c. La suite $\left(p_n\right)$ est-elle convergente ?
4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

   a. Démontrer que $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

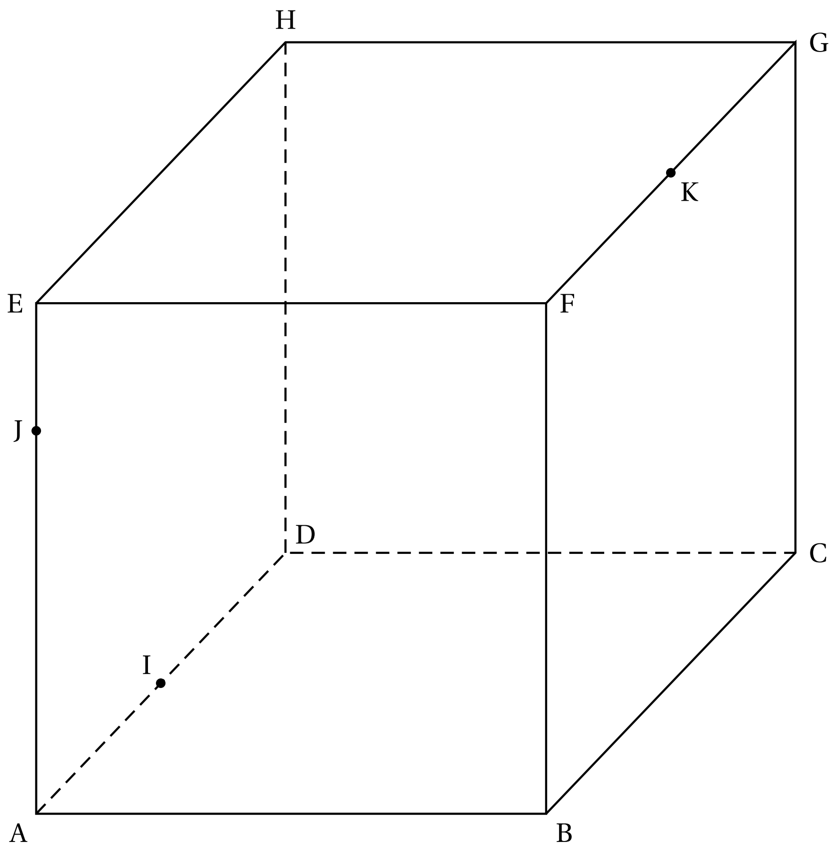
   c. Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$.
5. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
n ← 1
p ← 1
Tant que p > 0.801 faire
    n ← n + 1
    P ← (1/2)p + 2/5
Fin tant que
Afficher n
```

   a. Quel est son rôle ?

   b. Quel est l'affichage final ?

Annexe de l'exercice 3 (à rendre avec la copie)



Correction

Exercice 1

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.

On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\text{e}^{-0,1t}$, avec $t \in [0\,;\,+\infty[$.

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\,\mu$g.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

On résout l'équation $f(t) = 10 \iff 20\text{e}^{-0,1t} = 10 \iff \text{e}^{-0,1t} = \dfrac{1}{2} \iff)0,1t = \ln\dfrac{1}{2}$

$\iff t = -\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{0,1} = \dfrac{\ln 2}{0,1} \approx \boxed{6,9}$.

La demi-vie est d'environ 6,9 h, soit 6 h 54 min.

2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}.

On résout alors l'inéquation $f(t) \leqslant 0,2 \iff 20\text{e}^{-0,1t} \leqslant 0,2 \iff \text{e}^{-0,1t} \leqslant 0,01$

$\iff -0,1t \leqslant \ln 0,01 \iff t \geqslant -\dfrac{\ln 0,01}{0,1}\boxed{\approx 46,1}$.

Le médicament est éliminé au bout de 46,1 h (soit 46 h 6 min).

3. En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en μg.L^{-1}, le nombre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\text{d}t$.

$\displaystyle\int_0^x f(()\,\text{d}t = \int_0^x 20\text{e}^{-0,1t}\,\text{d}t = 20\left[-10\text{e}^{-0,1}t\right]_0^x = 200\left(1-\text{e}^{-0,1x}\right)$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(200\left(1-\text{e}^{-0,1x}\right)\right) = 200$ car $\displaystyle\lim_{x\to=\infty}\text{e}^{-0,1x} = 0$ donc $\boxed{\text{l'ASC est égale 200}}$.

Partie B : administration par voie orale

On note g(t) la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.

Le modèle mathématique est : $g(t) = 20\left(\text{e}^{-0,1t} - \text{e}^{-t}\right)$, avec $t \in [0\,;\,+\infty[$.

Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0\mu$g.L^{-1}.

1. On a : $g(t) = 20\left(\text{e}^{-0,1t} - \text{e}^{-t}\right)$.

On dérive : $g'(t) = 20\times\left[-0,1\text{e}^{-0,1t} - (-1)\text{e}^{-t}\right] = 20\left[-0,1\text{e}^{-0,1t} + \text{e}^{-t}\right] =$

$\boxed{20\text{e}^{-t}\left[1-0,1\text{e}^{0,9t}\right]}$

2. On étudie le signe de g' :

Quel que soit le réel t, $20\text{e}^{-0,1t} > 0$ donc $g'(t)$ est du signe de $1-0,1\text{e}^{0,9t}$.

a. $1-0,1\text{e}^{0,9t} = 0 \iff 1 = 0,1\text{e}^{0,9t} \iff \text{e}^{0,9t} = \dfrac{1}{0,1} = 10 \iff 0,9t = \ln 10 \iff t = \dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56$.

b. $1-0,1\text{e}^{0,9t} > 0 \iff 1 > 0,1\text{e}^{0,9t} \iff \text{e}^{0,9t} < \dfrac{1}{0,1} = 10 \iff 0,9t < \ln 10 \iff t > \dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56$.

c. $g\left(\dfrac{\ln 10}{0,9}\right) \approx 13,94$

On en déduit le tableau de variation

x	0		$\dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\dfrac{\ln 10}{0,9}\right) \approx 13,94$	$\searrow$	

La durée après laquelle la concentration est maximale est $\dfrac{\ln 10}{0,9}$ h, soit environ 2 h 34 min.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.

Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20μg.L^{-1}.

On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.

Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.

On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20μg.L^{-1}, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

a. **Initialisation** : Pour $n = 1$, $40 - 40 \times 0,5^1 = 40 - 40 \times 0,5 = 40 - 20 = 20 = u_1$ donc la propriété est **vraie au rang** $n = 1$.

b. **Hérédité** : on suppose que $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$ pour une valeur de n quelconque.
Alors $u_{n+1} = 0,5u_n + 20 = 0,5 \times \left[40 - 40 \times 0,5^n\right] + 20 = 20 - 40 \times 0,5 \times 0,5^n + 20 = 40 - 40 \times 0,5^{n+1}$ c.q.f.d.
La propriété est **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

2. $-1 < 0,5 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 40}$.

3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L-$^{-1}$.
On cherche l'entier n minimum tel que $u_n \geqslant 38$.
$u_n \geqslant 38 \iff 40 - 40 \times 0,5^n \geqslant 38 \iff -40 \times 0,5^n \geqslant -2 \iff 0,5^n \leqslant 0,05 \iff n\ln(0,5) \leqslant \ln(0,05)$ (en appliquant la fonction ‖n, croissante sur $]0\,;\,+\infty[$).
On obtient : $n \geqslant \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,5)} \approx 4,3$ (en divisant par $\ln 0,5$ qui est négatif).
Il faut donc au **minimum 5 injections**.

Exercice 2 :
Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\text{j} = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** On résout l'équation : $z^2+z+1=0$; $\Delta = -3 < 0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-1+\text{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1-\text{i}\sqrt{3}}{2}$

b. $\jmath = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1+\text{i}\sqrt{3}}{2} = z_1$ donc $\jmath$ est solution de l'équation $z^2+z+1=0$.

2. $|\jmath|^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$ donc $|\jmath| = 1$

$\jmath = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; on cherche θ tel que $\left\{\begin{array}{rcl}\cos\theta & = & -\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$ Donc $\theta = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

La forme exponentielle de $\jmath$ est donc : $\jmath = \text{e}^{\,\text{i}\frac{2\pi}{3}}$

3. **a.** $\jmath^3 = \left(\text{e}^{\,\text{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = \text{e}^{\,\text{i}\frac{2\pi\times 3}{3}} = \text{e}^{\,\text{i}\times 2\pi} = 1$

b. $\jmath$ est solution de l'équation $z^2+z+1=0$ donc $\jmath^2+\jmath+1=0$ et donc $\jmath^2 = -1-\jmath$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.

P a pour affixe 1 ; Q a pour affixe $\jmath = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et R pour affixe $\jmath^2 = -1-\jmath = -1+\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{PQ}^2 = \left|-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right|^2 = \left|-\dfrac{3}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4} = 3 \Longrightarrow \text{PQ} = \sqrt{3}$

$\text{QR}^2 = \left|-\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| 2 = \left|-\text{i}\sqrt{3}\right|^2 = 3 \Longrightarrow \text{QR} = \sqrt{3}$

$\text{RP}^2 = \left|1 + \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \left|\dfrac{3}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4} = 3 \Longrightarrow \text{RP} = \sqrt{3}$

PQ = QR = RP donc le triangle PQR est équilatéral.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \text{j}b + \text{j}^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. On sait que $a + b\jmath + c\jmath^2 = 0$ donc $a = -\jmath b - \jmath^2 c$.
Or, d'après la question **A. 3. b.**, $\jmath^2 = -1-\jmath$ donc :
$a = -\jmath b - \jmath^2 c = -\jmath b - (-1-\jmath)c = -\jmath b + c + \jmath c \iff a - c = \jmath(c-b)$

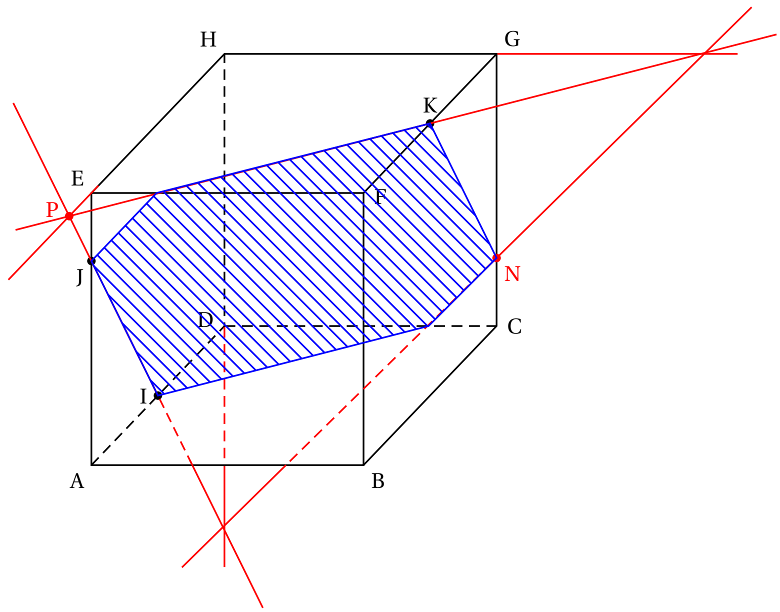
2. $a - c = \jmath(c-b) \Longrightarrow |a-c| = \left|\jmath(c-b)\right| \iff |a-c| = \left|\jmath\right| \times |c-b|$
On a vu précédemment que $\left|\jmath\right| = 1$; de plus $|a-c| = \text{AC}$ et $|c-b| = \text{BC}$.
On a donc démontré que AC = BC.

3. On sait que $a = -\jmath b - \jmath^2 c$. On sait aussi que $\jmath^2 = -1-\jmath$ donc $\jmath = -1-\jmath^2$.
On a donc $a = -(-1-\jmath^2)b - \jmath^2 c = b + \jmath^2 b - \jmath^2 c$ ce qui équivaut à $a - b = \jmath^2(b-c)$.

4. On sait que $\left|\jmath\right| = 1$ donc $\left|\jmath^2\right| = \left|\jmath\right|^2 = 1$. De plus $|a-b| = \text{AB}$ et $|b-c| = \text{CB}$.
On a vu dans la question précédente que $a-b = \jmath^2(b-c)$ ce qui entraîne $|a-b| = \left|\jmath^2(b-c)\right|$ ou encore $|a-b| = \left|\jmath^2\right| \times |b-c|$. Cette dernière égalité équivaut à AB = CB.
Comme AC = BC et AB = CB, on a démontré que le triangle ABC était équilatéral.

Exercice 3 :

1. Construction du point P, intersection du plan (IJK) et de la droite (EH) : voir figure.
2.
   - 1 point Le point P est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (EH) ; le point H appartient au plan (EFG) donc la droite (EH) est contenue dans le plan (EFG).
     On en déduit que P ∈ (IJK) ∩ (EFG).
   - Le point K appartient au plan (IJK) et à la droite (FG) qui est contenue dans le plan (EFG). 2 points
     On en déduit que K ∈ (IJK) ∩ (EFG).
   - Les plans (IJK) et (EFG) ne sont pas parallèles donc leur intersection est une droite. Les deux points P et K appartiennent à l'intersection des deux plans donc l'intersection des deux plans (IJK) et (EFG) est la droite (PK).



Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3x-4)\mathrm{e}^{-2x}$

   Affirmation 1 : la dérivée de cette fonction est : $f'(x) = (3x-1)\mathrm{e}^{-2x}$

$$f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x} - 2(3x-4)\mathrm{e}^{-2x} = (3-6x+8)\,\mathrm{e}^{-2x} = (-6x+11)\,\mathrm{e}^{-2x} =$$

2. En 2016, en France, les forces de l'ordre ont réalisé 9,8 millions de dépistages d'alcoolémie auprès des automobilistes, et 3,1 % de ces dépistages étaient positifs.
   Dans une région donnée, le 15 juin 2016, une brigade de gendarmerie a effectué un dépistage sur 200 automobilistes.

   Affirmation 2 : en arrondissant au centième, la probabilité que, sur les 200 dépistages, il y ait eu strictement plus de 5 dépistages positifs, est égale à 0,59.

   - La proportion de dépistages positifs sur 9,8 millions de dépistages d'alcoolémie est de 3,1 % donc on peut considérer que la probabilité qu'un dépistage soit positif est égale à $p = 0{,}031$.
   - On réalise 200 dépistages dont les résultats sont indépendants les uns des autres; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de dépistages positifs suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}031$.
   - On cherche donc $P(X > 5)$ c'est-à-dire $1 - P(X \leqslant 5)$.
   - À la calculatrice, on trouve $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}41$ donc $P(X > 5) \approx 0{,}59$.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$.

Affirmation 3 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

- Soit $I=\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.
  - $\ln(6x-2)$ n'existe que si $6x-2>0$, c'est-à-dire $x>\dfrac{1}{3}$; donc $\ln(6x-2)$ existe si $x\in I$.
  - $\ln(2x-1)$ n'existe que si $2x-1>0$, c'est-à-dire $x>\dfrac{1}{2}$; donc $\ln(2x-1)$ existe si $x\in I$.
  - $\ln(x)$ n'existe que si $x>0$; donc $\ln(x)$ existe si $x\in I$.
- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff \ln\big((6x-2)(2x-1)\big)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$
  $\iff 12x^2-4x-6x+2=x \iff 12x^2-11x+2=0$
- On résout dans I l'équation $12x^2-11x+2=0$.
  $\Delta=11^2-4\times12\times2=25=5^2$; $x'=\dfrac{11+5}{2\times12}=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$ et $x''=\dfrac{11-5}{24}=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$
  $x'\in I$ et $x''\notin I$ donc l'équation du départ n'admet qu'une solution dans l'intervalle I.

L'affirmation 3 est fausse.

Exercice 3 (spécialité) :
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Partie A - Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,005$, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est $0,6$.

On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.

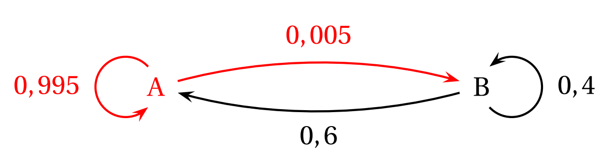
On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation.

On a donc $a_0=1$ et $b_0=0$.

On appelle X_n la matrice ligne $X_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$.

L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste à deux états ; le A qui correspond à « l'atome est dans un état stable », et le B qui correspond à « l'atome est dans un état excité » :



On a pour tout n, $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 0,995\,a_n+0,6\,b_n\\ b_{n+1} & = & 0,005\,a_n+0,4\,b_n\end{array}\right.$

1. Il n'y a que deux états qui s'excluent mutuellement donc, pour tout n, $a_n+b_n=1$.
D'après le système :
$a_1=0,995a_0+0,6b_0=0,995\times1+0,6\times0=0,995$ et $b_1=1-a_1=1-0,995=0,005$
$a_2=0,995a_1+0,6b_1=0,995\times0,995+0,6\times0,005=0,993\,025$ et
$b_2=1-a_2=1-0,993\,025=0,006\,975$

2. Le système précédent s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,45 \end{pmatrix}$.

La matrice de transition dans le milieu 1 est donc : $A = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,45 \end{pmatrix}$

On admet alors que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 A^n$.

3. On définit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$; on admet que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

À la calculatrice, on trouve : $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,395 \end{pmatrix}$

4. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $A^n = PD^nP^{-1}$. On va démontrer cette propriété par récurrence.

Initialisation

On prend $n = 0$. On appelle $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 2.

$A^n = A^0 = I_2$ et $D^n = D^0 = I_2$ donc $PD^nP^{-1} = PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$

Pour $n = 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$, donc la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0.

Hérédité

Soit p un entier naturel quelconque tel que la propriété soit vraie au rang p, c'est-à-dire $A^p = PD^pP^{-1}$ (hypothèse de récurrence).

$A^{p+1} = A^1 \times A^p = \left(PD^1P^{-1}\right) \times \left(PD^pP^{-1}\right) = PD\left(P^{-1}P\right)D^pP^{-1} = PDI_2D^pP^{-1} = PDD^pP^{-1}$
$= PD^{p+1}P^{-1}$

Donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire pour tout $p \geqslant 0$. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$: pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. On admet par la suite que, pour tout n, $A^n = \dfrac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120\left(1 - 0,395^n\right) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix}$.

On sait que $X_n = X_0 A^n$ donc

$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120\left(1 - 0,395^n\right) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \end{pmatrix}$.

Or $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ donc, pour tout n, $a_n = \dfrac{120 + 0,395^n}{121}$.

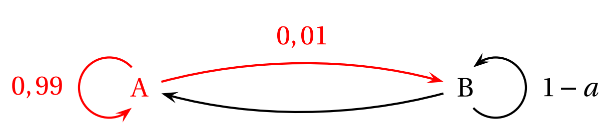
6. $-1 < 0,395 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,395^n = 0$; il s'ensuit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{120}{121}$.

La probabilité sur le long terme que l'atome soit dans un état stable est donc égale à $\dfrac{120}{121}$.

Partie B - Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,01.

1. La nouvelle situation peut être représentée par le graphe probabiliste suivant :



On a pour tout n, $\begin{cases} a_{n+1} &= 0,99\,a_n + a\,b_n \\ b_{n+1} &= 0,01\,a_n + (1-a)\,b_n \end{cases}$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

La matrice de transition dans le milieu 2 est donc : $M = \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %. On admet qu'il existe un unique vecteur X, appelé état stationnaire, tel que $XM = X$, et que $X = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.

$$XM = X \iff \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0,98 \times 0,99 + 0,02a &= 0,98 \\ 0,98 \times 0,01 + 0,02\,(1-a) &= 0,02 \end{cases}$$
$$\iff 0,98 \times 0,01 = 0,02a \iff a = 0,49$$

La valeur de a cherchée est $0,49$.

Exercice 4 :

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

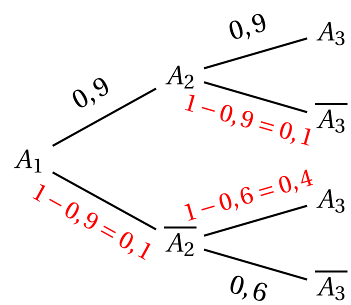
— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».

On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. a. On complète l'arbre de probabilités relatif aux trois premières semaines.



b. D'après la formule des probabilités totales :

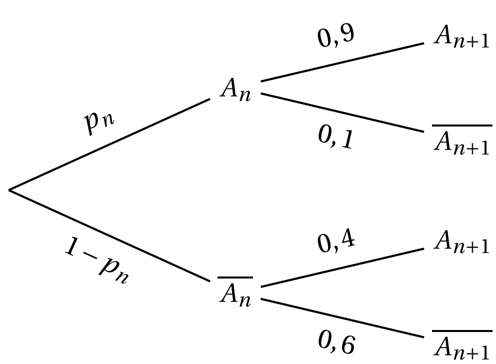
$$P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P\left(\overline{A_2} \cap A_3\right)$$
$$= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3)$$
$$= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85$$

c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 est :

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0,9 \times 0,9}{0,85} \approx 0,95.$$

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. On représente un arbre pondéré correspondant aux semaines n et $n+1$:



D'après la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = p_n \times 0,9 + \left(1 - p_n\right) \times 0,4 = 0,5p_n + 0,4.$

3. **a.** Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $p_n > 0,8$.

- **Initialisation**

  On sait que $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0,8$; la propriété est vraie au rang 1.

- **Hérédité**

  Soit un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la propriété soit vraie au rang k, c'est-à-dire $p_k > 0,8$. C'est l'hypothèse de récurrence.

  On va démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, $p_k > 0,8$ donc $0,5p_k > 0,4$ et donc $0,5p_k + 0,4 > 0,8$ qui signifie $p_{k+1} > 0,8$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire pour tout $k \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,8$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,4 - p_n = 0,4 - 0,5p_n$.

Or $p_n > 0,8$ donc $0,5p_n > 0,4$ donc $-0,5p_n < -0,4$ et donc $0,4 - 0,5p_n < 0$.

On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$ et donc que la suite (p_n) est strictement décroissante.

c. Pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > 0,8$ donc la suite (p_n) est minorée par 0,8.

On a vu aussi que la suite (p_n) était décroissante.

D'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite (p_n) est convergente.

4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$ donc $p_n = v_n + 0,8$.

a.
- $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(v_n + 0,8) - 0,4 = 0,5v_n + 0,4 - 0,4 = 0,5v_n$
- $v_1 = p_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = 0,2$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

Comme pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = v_n + 0,8$, on en déduit que $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et $-1 < 0,5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente vers 0. Pour tout $n > 0$, $p_n = v_n + 0,8$ donc la suite (p_n) est convergente et a pour limite 0,8.

5. On considère l'algorithme ci-dessous :

$n \leftarrow 1$	*Initialise l'indice à 1*
$p \leftarrow 1$	*Affecte p_1 à p*
Tant que $p > 0.801$ faire	*Début de la boucle permettant les calculs de indices et des valeurs de la suite (p_n) tant que les termes sont supérieur strictement à 0,801*
$\quad n \leftarrow n+1$	*Augmente l'indice de 1*
$\quad P \leftarrow \frac{1}{2}p + \frac{2}{5}$	*Calcul de terme d'indice n*
Fin tant que	*fin de la boucle*
Afficher n	*Affiche la première valeur de l'indice n pour lequel le terme de la suite est inférieure à 0,801*

a. Quel est son rôle ?

Déterminer la première valeur de l'indice n pour lequel le terme de la suite est inférieure à 0,801.

b. Quel est l'affichage final ?

n	1	2	.....	8	9
p_n	1	0,9	.....	0,8015625	0,80078125

Donc le premier terme pour lequel les termes de la suite deviennent inférieur à 0,801 est le terme d'indice 9.