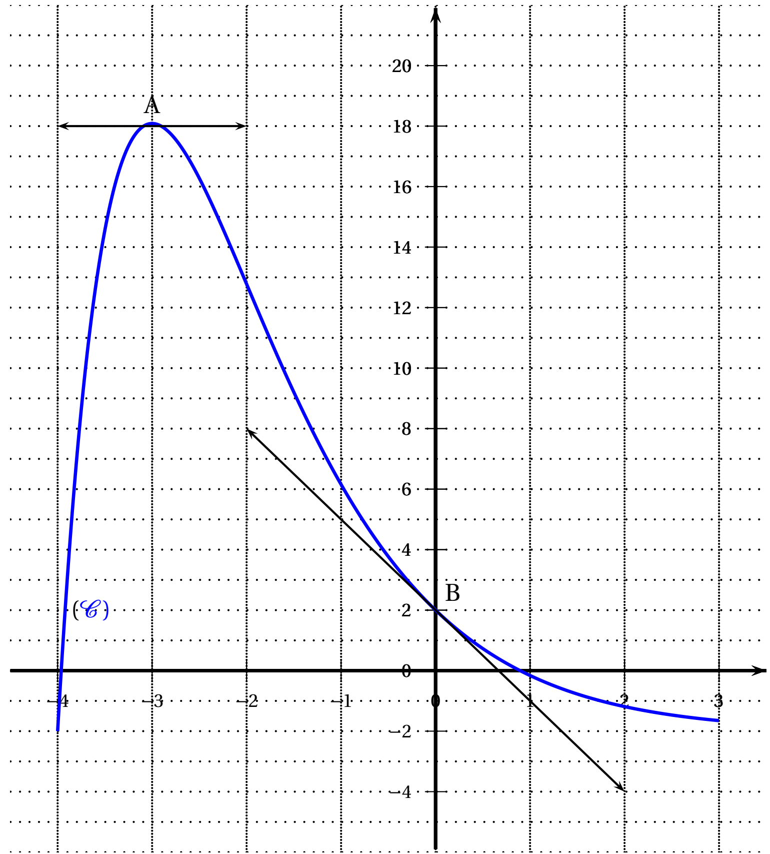
Bac blanc 2021 : Spécialité Mathématiques.

EXERCICE 1 **5 points**

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$ dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les points A d'abscisse -3 et B$(0 ; 2)$ sont sur la courbe $(\mathscr{C})$.

Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.

Les parties A et B sont indépendantes



PARTIE A

Par lecture graphique, déterminer en justifiant :

1. $f'(-3)$;

2. $f(0)$ et $f'(0)$.

.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Justifier que, pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Donner en justifiant le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$, puis donner un encadrement de la plus grande des solutions α à 0,01 près.

4. Montrer que l'équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à $(\mathscr{C})$ au point C d'abscisse -2 est :

$$y = -\mathrm{e}^2 x - 2 - \mathrm{e}^2$$

5. Étude algébrique de la convexité.

a. Montrer que :

$$f''(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

b. En déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que la position relative de $(\mathscr{T})$ et de $(\mathscr{C})$.

6. Utilisation de la convexité de la fonction.

a. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0.

b. Justifier que

$$\forall x \in [-2, +\infty[, -3x + 2 \leqslant -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}$$

c. En déduire que :

$$\forall x \in [-2, +\infty[,\ \frac{-3x+4}{x+4} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.

2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

a. En remarquant que $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - u_n + \dfrac{3}{2}$, montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}\ell^2 - \ell + \dfrac{3}{2}$.

b. Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.

3. Dans cette question, on prend $a = 2,9$.

a. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

c. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4. Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.

a. À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

b. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

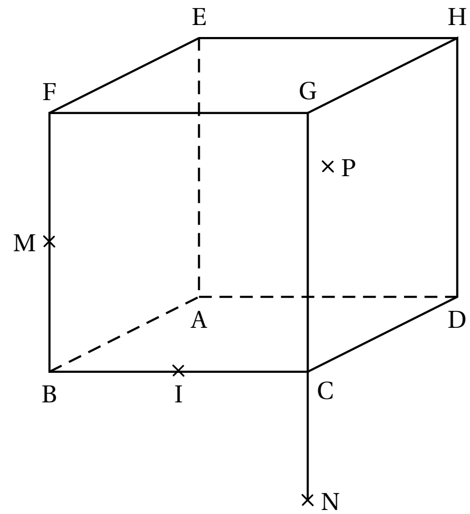
c. L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p > 10^6$.
Recopier et compléter cet algorithme.
P est un nombre entier et U est un nombre réel.

```
P ← 0
U ......

Tant que ...
    P ← ......
    U ← ......
Fin Tant que
```

EXERCICE 3 **4 points**

On considère un cube ABCDEFGH.
Le point M est le milieu de [BF], I est le milieu de [BC], le point N est défini par la relation $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ et le point P est le centre de la face ADHE.



Partie A :

1. Justifier que la droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu I.
2. Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan (MNP).

Partie B :

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

   En déduire une équation cartésienne du plan (MNP).
2. Montrer que le point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de G sur le plan (MNP)

   En déduire la distance de G à (MNP).
3. Distance de P à (MI).
   - **a.** Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par P et orthogonal à la droite (MI).
   - **b.** Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (MI) avec le plan $\mathscr{P}$.
   - **c.** En déduire la distance de P à la droite (MI). (Penser à justifier)
4. **(Bonus)** Étude du quadrilatère $(EDIM)$.
   - **a.** Justifier que les droites (ED) et (MI) sont parallèles et en déduire que les quatre points M, E, D et I sont coplanaires.
   - **b.** En déduire que l'aire du quadrilatère (MEDI) est $\frac{9}{8}$ unités d'aire.
   - **c.** Calculer le volume de la pyramide GMEDI.

     (On rappelle que le volume d'une pyramide est $Volume = \frac{1}{3} base \times hauteur$)

EXERCICE 4 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

PARTIE I

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 98 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.

Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.

Déterminer la loi suivit par X.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

a. 0 **b.** 0,16 **c.** 0,83 **d.** 1

2. La probabilité que exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

a. $\binom{7}{2} \times 0,98^2 \times 0,02^7$ **b.** $\binom{9}{2} \times 0,98^2 \times 0,02^7$ **c.** $\binom{7}{2} \times 0,98^7 \times 0,02^2$ **d.** $\binom{9}{2} \times 0,98^7 \times 0,02^2$

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

a. $1 - P(X = 0)$ **b.** $P(X \geqslant 2)$ **c.** $P(X \leqslant 1)$ **d.** $P(X < 1)$

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 2 boules blanches, indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne. On considère les évènements suivants :

— V_1 : la première boule tirée est verte ;
— B_1 : la première boule tirée est blanche ;
— V_2 : la seconde boule tirée est verte ;
— B_2 : la seconde boule tirée est blanche

4. La probabilité de l'événement V_2 est égale à :

a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{3}{28}$ **d.** $\frac{9}{7}$

5. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_2}(V_1)$, est égale à :

a. $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{4}{7}$ **c.** $\frac{2}{7}$ **d.** $\frac{5}{6}$