BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2019

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

COEFFICIENT : **9.**

Ce sujet comporte six pages numérotées de 1/5 à 5/5

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée en mode examen

Consignes :

- Vous ne devrez activer le mode examen de la calculatrice qu'une fois que l'examinateur vous en donnera la consigne.
- Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
- Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.

On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\text{e}^{-0,1t}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\,\mu$g.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
   Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.
2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}.
   Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

Partie B : administration par voie orale

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.

Le modèle mathématique est : $g(t) = 20\left(\text{e}^{-0,1t} - \text{e}^{-t}\right)$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0\ \mu$g.L^{-1}.

1. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :
   $g'(t) = 20\text{e}^{-t}\left(1 - 0,1\text{e}^{0,9t}\right)$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)
   En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.

Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20μg.L^{-1}.

On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.

Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.

On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20μg.L^{-1}, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L-$^{-1}$.
   Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

3. Démontrer les égalités suivantes :

a. $\mathrm{j}^3 = 1$;

b. $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.

2. En déduire que AC = BC.

3. Démontrer l'égalité : $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.

4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE 3 — 5 POINTS

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Partie A - Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,005$, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est $0,6$.

On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.

On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation.

On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

On appelle X_n la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.

L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Calculer a_1 puis b_1 et montrer que $a_2 = 0{,}993\,025$ et $b_2 = 0{,}006\,975$.
2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n A$.
   A est appelée matrice de transition dans le milieu 1.
   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 A^n$.
3. On définit la matrice P par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$.
   On admet que P est inversible et que
   $$P^{-1} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel n,
   $$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120\,(1 - 0,395^n) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix}.$$
   En déduire une expression de a_n en fonction de n.
6. Déterminer la limite de la suite (a_n). Conclure.

Partie B - Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,01$.

1. Donner, en fonction de a, la matrice de transition M dans le milieu 2.
2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %.
   On admet qu'il existe un unique vecteur X, appelé état stationnaire, tel que $XM = X$, et que $X = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la valeur de a.

Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

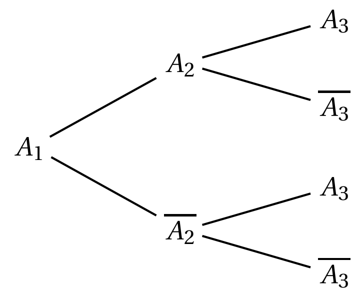
On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».

On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. **a.** Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.

   b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.

   c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?
   Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.

   b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

   c. La suite (p_n) est-elle convergente ?
4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

   c. Déterminer la limite de la suite (p_n).
5. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
n ← 1
p ← 1
Tant que p > 0.801 faire
    n ← n + 1
    P ← (1/2)p + 2/5
Fin tant que
Afficher n
```

   a. Quel est son rôle ?

   b. Quel est l'affichage final ?