Chapitre 10 : Dénombrement.

En mathématiques, le **dénombrement** est la détermination du nombre d'éléments d'un ensemble. Il s'obtient en général par un comptage ou par un calcul de son cardinal à l'aide de techniques combinatoires.

I Cardinal d'un ensemble fini

A Cardinal d'un ensemble et d'un sous ensemble.

Définition 1 (Cardinal)

Un ensemble E non vide est dit être fini s'il existe un entier n et une bijection entre E et $[\![1, n]\!]$. Dans ce cas on appelle n le cardinal de E et on note $\text{Card}(E) = n$.
Par convention l'ensemble vide est fini et de cardinal 0.

Remarque 1. Le cardinal d'un ensemble fini est simplement le nombre d'éléments de cet ensemble. Donner une bijection entre E et $[\![1, n]\!]$ consiste à numéroter les éléments de E.

Exemple 1.
1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est fini de cardinal n.
2. La BCPST1 $2019 - 2020$ est un ensemble fini de cardinal 45. La liste d'appel peut, par exemple, fournir une bijection entre la classe et l'ensemble $[\![1, 45]\!]$.
3. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont tous infinis.

Proposition 1

Soit E un ensemble fini et soit $A \subset E$.
- Alors A est un ensemble fini et $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(E)$. De plus on a $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ si et seulement si $A = E$.
- Soit $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors $\bar{A}$ est fini et

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$

Remarque 2. Dans le cas d'équiprobabilité, en divisant par $\text{Card}(\Omega)$ on obtient simplement : $P(A) \leqslant 1$ et $P(\overline{A} = 1 - P(A)$.

Exemple 2. Dans la classe de BCPST1 2019-2020 il y a 45 élèves dont 14 garçons, il y a donc $45 - 14 = 31$ filles.

B Union et intersection.

Théorème 2

Soit A et B deux ensembles. La réunion $A \cup B$ est un ensemble fini si et seulement si A et B sont tous les deux finis et alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

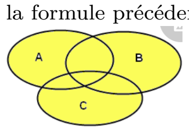
(Si A et B disjoints alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$)

Soit C un autre ensemble. La réunion $A \cup B \cup C$ est un ensemble fini si et seulement si A, B et C sont tous les trois finis et alors

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) \\ - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) \\ + \text{Card}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Remarque 3. Dans le cas d'équiprobabilité, en divisant par $\text{Card}(\Omega)$ on obtient simplement : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Remarque 4. On peut retrouver cette formule en faisant un graphique comme pour la formule précédente.



Exemple 3. Parmi les 45 élèves de BSPCT 1, lors d'une journée "sportive".
- 30 ont choisi de jouer au basket (ensemble B).
- 23 ont choisi de jouer au volley (ensemble V).
- 20 ont choisi de jouer au handball (ensemble H)

Certains d'entre eux ont pu choisir de pratiquer soit deux soit trois sports. On sait :

- 15 ont choisi de jouer au basket et au volley.
- 11 ont choisi de jouer au basket et au handball.
- 10 ont choisi de jouer au volley et au handball.

On sait que seuls 3 élèves n'ont pratiqué aucun de ces trois sports.

Combien d'élèves ont pratiqué les 3 sports.

On a : $\text{Card}(B \cup V \cup H) = 45 - \text{Card}(\overline{B \cup V \cup H}) = 45 - 3 = 42$. Donc :

$$\begin{aligned}\text{Card}(B \cap V \cap H) &= \text{Card}(B \cup V \cup H) - \text{Card}(B) - \text{Card}(V) - \text{Card}(H) + \text{Card}(B \cap V) + \text{Card}(B \cap H) + \text{Card}(V \cap H) \\ &= 42 - 30 - 23 - 20 + 15 + 11 + 10 = 2\end{aligned}$$

Donc 2 ont choisi de pratiquer les 3 sports.

De manière générale on a le résultat suivant, dit principe d'inclusion-exclusion.

Théorème 3

Principe d'inclusion-exclusion Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \cdots A_n)$ une famille d'ensembles. La réunion $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est un ensemble fini si et seulement si tous les A_i sont finis et alors

$$\begin{aligned}\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n \text{Card}\,(A_i) - \sum_{\substack{(i,j)\\1\leqslant i<j\leqslant n}} \text{Card}\,(A_i \cap A_j) + \ \cdots\ + (-1)^{n+1}\text{Card}\,(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \\ &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} \text{Card}\,(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})\right)\end{aligned}$$

Si les A_i sont deux-à-deux disjoints alors : $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i)$

C Produit cartésien

Proposition 4

Soit A et B deux ensembles non-vides. Le produit cartésien $A \times B$ est fini si et seulement si A et B sont tous les deux finis et alors

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

Plus généralement soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \cdots A_n)$ une famille d'ensembles non vides. Le produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_n$ est un ensemble fini si et seulement si tous les A_i sont finis et alors

$$\text{Card}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{k=1}^n \text{Card}(A_k)$$

II p-listes.

A p-liste avec répétition.

1 Approche ensembliste.

Définition-Proposition 5

Pour le cas particulier A^p avec $p \in \mathbb{N}^*$, les éléments de l'ensemble A^p sont appelés des **p-liste** (avec répétitions possibles) d'éléments de A et l'on a :

$$\text{Card}(A^p) = \text{Card}(A)^p$$

Remarque 5. En probabilité, on parlera de *n tirages avec remises.*

Démonstration 1. Pour construire une p-liste avec répétition possible dans un ensemble à n éléments, on a :

- n façons de choisir le premier élément.
- n façons de choisir le deuxième élément.
- ...
- n façons de choisir le $p^{ième}$ élément.

Soit donc n^p façons de construire une p-liste.

Exemple 4. Vous disposez de 10 paires de chaussettes que vous voulez ranger dans 4 tiroirs. De combien de manière différentes pouvez-vous le faire ?

On dispose d'un ensemble E les 4 tiroirs de cardinal $n = 4$ et on cherche le nombre de manières de choisir successivement et avec remise $p = 10$ éléments de E (à chaque tiroir on choisit une paire de chaussettes à y mettre.). On cherche donc le nombre de 10-listes d'éléments de E. On obtient donc 4^{10} façons de ranger les 10 chaussettes.

2 Approche fonctionnelle.

Proposition 6

Soit E et F deux ensembles finis. L'ensemble $\mathcal{A}(E, F)$ des applications de E dans F, est fini et on a

$$\text{Card}\left(\mathcal{A}(E, F)\right) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$$

Démonstration 2. Soit E et F deux ensembles finis. Combien y-a-t-il d'applications de E dans F ?
Comment construit-on une application ? On prend un élément de E et on lui associe un élément de F, on répète ce procédé pour tous les éléments de E.
Pour un élément $x \in E$ on a $\text{Card}(F)$ choix pour $f(x)$, on répète un tel choix autant de fois qu'il y a d'éléments dans E, soit $\text{Card}(E)$. On obtient donc $\text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$ choix possibles.

Exemple 5. Vous disposez de 10 paires de chaussettes que vous voulez ranger dans 4 tiroirs. De combien de manières différentes pouvez-vous le faire ?

Un rangement est un procédé qui à chaque paire de chaussettes associe un tiroir, c'est donc un application de l'ensemble des chaussettes dans l'ensemble des tiroirs. On sait qu'il y a 4^{10} applications de ce type, d'où $4^{10} = 1048576$ rangements différents possibles.

B p-listes sans répétition.

1 Approche ensembliste.

Définition 2

Soit F un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-liste sans répétition de F toute p-liste $(x_1, \cdots, x_p)$ d'éléments de F deux-à-deux distincts.

Remarque 6. Dans certaines littératures on parle d'arrangements à p éléments parmi n pour rappeler que l'**on range p éléments pris parmi n.**

Remarque 7. Si $\text{Card}F < p$, il n'existe pas de p-liste de F.

Théorème 7

Soit F un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in \mathbb{N}$. Alors

- Si $p \leqslant n$, il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ p-listes sans répétition d'éléments de F.
- Si $p > n$, il y a 0 p-listes sans répétition d'éléments de F.

Démonstration 3. Soit F un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in \mathbb{N}$. Pour obtenir une p-liste sans répétition :

- pour le premier élément, on a n façons de le choisir,
- pour le second plus que $n - 1$
- ...
- pour le $p^{ième}$ plus que $n - (p - 1) = n - p + 1$ façons.

Donc le nombre de p-listes sans répétition est :

$$n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Définition-Proposition 8

Soit F un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Une n-liste est appelée une **permutation** des éléments de F.
Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est : $n!$

Remarque 8. Cette appellation est particulièrement explicite puisqu'il s'agit effectivement du nombre de façons de **permuter** les n éléments de E.

Démonstration 4. Voir démonstration précédente.

2 Approche fonctionnelle.

Proposition 9

Soit E un ensemble fini de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ et F un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\text{Nombre d'injections de } E \text{ dans } F = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E) \\ \frac{n!}{(n-p)!} \end{cases}$$

Démonstration 5. Soit E et F deux ensembles finis. Combien y-a-t-il d'injections de E dans F ?
Comment construit-on une injection de E dans F ?
On prend un élément $x_1 \in E$ et on lui associe un élément y_1 de F, pour cela on a $\mathrm{Card}(F)$ choix, on prend ensuite un autre élément $x_2 \in E$ et on lui associe un élément y_2 de F différent de y_1, pour cela on a $\mathrm{Card}(F)-1$ choix. on continue ainsi jusqu'à avoir fini E. On a donc fait $\mathrm{Card}(E)$ choix successifs avec à chaque fois une possibilité de moins d'où

$$\text{Nombre d'injections de } E \text{ dans } F = \mathrm{Card}(F) \times (\mathrm{Card}(F)-1) \times \cdots \times (\mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E) + 1)$$

Définition-Proposition 10

Le nombre de bijections d'un ensemble F de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ dans lui-même est $n!$. Une telle bijection est aussi appelée une **permutation** de F.

Démonstration 6. Voir démonstration précédente.

III Combinaisons.

A Définition.

Définition 3

Soit E un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}$. On appelle k-combinaison de E toute partie de E à k éléments

Remarque 9. Une k-combinaison est simplement un sous ensemble de E à k éléments.

B Nombre de sous partie à k éléments.

Théorème 11

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![0, n]\!]$. Le nombre de k-combinaisons de E est le nombre $\binom{n}{k}$ défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Par convention, si $k < 0$ ou $k > n$ on pose $\binom{n}{k} = 0$. On le lit « k parmi n ».
On appelle les nombres $\binom{n}{k}$ des **coefficients binomiaux** (la raison viendra plus tard).

Remarque 10. Il n'existe pas de parties de E avec un nombre négatif d'éléments ou plus d'éléments que dans E.

Démonstration 7. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit F un sous-ensemble de E de cardinal k. Comme F est de cardinal k il existe alors, d'après la proposition 8, $k!$ manières différentes de placer dans un certain ordre les éléments de F.
Ainsi il existe $\binom{n}{k} \times k!$ listes ordonnées de k éléments choisis parmi E.
Or on a vu dans le théorème 7, qu'il existait $\frac{n!}{(n-k)!}$ listes ordonnées de k éléments choisis parmi E.
Ainsi $\binom{n}{k} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!}$, soit

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Un autre point de vue sur les coefficients binomiaux est le suivant

Proposition 12

Le nombre de manières de choisir k éléments parmi n éléments sans répétition et sans ordre est $\binom{n}{k}$

Exemple 6. Je souhaite créer un groupe de trois élèves de la classe, j'ai alors $\binom{38}{3} = \frac{38!}{3!35!} = 501942$ possibilités pour le faire.

C Autre approche du Binôme de Newton.

Proposition 13 (Rappel)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Remarque 11. On voit ici un approche combinatoire de la formule du Binôme de Newton.

Démonstration 8.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times \ldots \times (a+b)}_{\text{Doit être interprété comme n "emplacements" lors du développement.}}$$

Soit $k \in [\![0;k]\!]$. Pour obtenir le coefficient de $a^k b^{n-k}$ il faut choisir k fois "a" lors de développement (dès lors "b" sera choisi $n-k$ fois) . Le nombre de façons de choisir k fois "a" est bien $\binom{n}{k}$. D'où le coefficient du monôme $a^k b^{n-k}$ et on retrouve :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

D Nombre de sous-ensembles.

1 Approche ensembliste.

Proposition 14

Soit E un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini et on a

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$$

Démonstration 9. Soit E un ensemble de cardinal fini n. Combien E admet-il de sous-ensembles ?
Pour répondre à cela posons nous la question de comment construire un sous-ensemble F de E. On prend les éléments un par un et pour chaque élément :

- soit on le "choisit"
- Soit non.

Soit 2 possibilités pour chacun des n éléments. Donc en tout, 2^n façons de construire une sous-partie de E.

2 Approche calculatoire.

Proposition 15

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini et on a

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{\mathrm{Card}(E)}$$

Démonstration 10. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Si l'on note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des sous-parties de E de cardinal $k \in [\![0, n]\!]$.
On a l'union disjointe :

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$$

Donc :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k}}_{\text{Binôme de Newton}} = 2^n$$

3 Approche fonctionnelle.

Proposition 16

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini et on a :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{Card}\left(\mathcal{A}(E, [\![0, 1]\!])\right) = \mathrm{Card}([\![0, 1]\!])^{\mathrm{Card}(E)} = 2^n$$

Démonstration 11. Reprendre la démonstration 8 avec $\mathcal{A}(E, [\![0, 1]\!])$

IV Méthodes.

Méthode-exemple 1 (calcul des coefficients binomiaux)

On sera amenés à calculer des coefficients binomiaux "à la main".

- Retenir les formules du cours : $\binom{n}{0} = \binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, "miroir", et $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
- Savoir construire le triangle de Pascal (et connaitre la formule de Pascal)
- Connaitre les formules :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \dots \times 1}$$

Pour déterminer $\binom{10}{4}$:

$$\binom{10}{4} = \frac{\overbrace{10 \times 9 \times 8 \times 7}^{\text{4 facteurs}}}{\underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{\text{4 facteurs}}} \underbrace{=}_{\textbf{Simplifier !!!}} = \frac{10 \times 3 \times 7}{1} = 210$$

Remarque 12. Attention à ne pas calculer le numérateur et le dénominateur avant d'avoir simplifier

Méthode-exemple 2 (Suite de combinaisons.)

Dans le cas d'une urne avec 5 boules blanches, 3 noires et 2 rouges. On tire simultanément 5 boules.
• Le nombre de possibilités totales est simplement $\binom{10}{5}$.
• le nombre de possibilités avec 3 blanches et 2 noires est :

$$\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{3 B parmi 5}} \times \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{2 N parmi 3}} \times \underbrace{\binom{2}{0}}_{\text{0 R parmi 2}} = 10 \times 3 \times 1 = 30$$

Méthode-exemple 3 (anagramme)

Le nombre d'anagrammes de "anagramme" (attention ici on considère toutes les mots : avec ou sans sens) :

- On réfléchit en termes "d'emplacements". Il y en a 9 ici (puisque 9 lettres)
- On dénombre le nombre de représentants de chaque lettre :
  - 3 "a"
  - 2 "m"
  - 1 pour les 4 autres lettres.
- Il y a $\binom{9}{3} = 84$ façons de placer les "a".
- Il ne reste plus que $9 - 3 = 6$ emplacements possibles pour les "m" et donc $\binom{6}{2} = 15$ façons de placer les 2 "m".
- Ensuite pour le "n" : $\binom{4}{1} = 4$ (puisqu'il ne reste que 4 emplacements)
- Ensuite pour le "g" : $\binom{3}{1} = 3$
- Ensuite pour le "r" : $\binom{2}{1} = 2$
- Ensuite pour le "e" : $\binom{1}{1} = 1$

Le nombre de possibilités au total est donc :

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 84 \times 15 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Remarque 13. Si toutes les lettres sont différentes, par exemple "table", le nombre d'anagrammes est simplement le nombre de permutations :

$$5! = 120$$

Méthode 4

Pour compter le nombre d'éléments vérifiant une propriété ou compter le nombre de configurations issues d'une expérience,

- on découpe le problème en plusieurs étapes
- on utilise les formules du cours pour dénombrer chaque étape.
- On fera bien attention de vérifier qu'on n'a pas oublié de cas et qu'on n'a pas compté plusieurs fois les mêmes cas (sinon il faudra diviser par le nombre de fois que l'on a compté).