Chapitre 10 : résumé sur le dénombrement.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un ensemble E fini de cardinal n et A, B et C trois sous ensembles de E.

A Ensembles finis et cardinal.

Définition-Proposition 1 (Cardinal)

Un ensemble E non vide est dit être fini s'il existe un entier n (qui sera appelé cardinal de E) et une bijection entre E et $[\![1, n]\!]$.
Par convention l'ensemble vide est fini et de cardinal 0.

- $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(E)$. De plus on a $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ si et seulement si $A = E$.
- $\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
- $\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$

B p-listes avec répétitions.

Définition-Proposition 2

Pour le cas particulier E^p avec $p \in \mathbb{N}^*$, les éléments de l'ensemble A^p sont appelés des **p-liste** (avec répétitions possibles) d'éléments de A et l'on a :

$$\text{Card}(A^p) = \text{Card}(A)^p = n^p$$

Soit E et F deux ensembles finis. L'ensemble $\mathcal{A}(E, F)$ des applications de E dans F, est fini et on a

$$\text{Card}\left(\mathcal{A}(E, F)\right) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$$

C p-listes sans répétition (rangement de p éléments).

Définition-Proposition 3

Soit F un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle p-liste sans répétition de F une p-liste de F où les éléments sont 2-à-2 distincts. On a alors :

- Si $p \leqslant n$, il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ p-listes sans répétition d'éléments de F.
- Si $p > n$, il y a 0 p-listes sans répétition d'éléments de F.
- Une n-liste est appelée une **permutation** des éléments de F. Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est : $n!$

Soit E un ensemble fini de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ alors

- Nombre d'injections de E dans F = $\begin{cases} 0 \text{ si } \text{Card}(F) < \text{Card}(E) \\ \frac{n!}{(n-p)!} \end{cases}$
- Le nombre de bijections (appelées ici **permutations**) de F dans lui-même est $n!$.

D Combinaisons.

Définition-Proposition 4

Soit E un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}$. On appelle k-combinaison de E toute partie de E à k éléments, et alors :

- Le nombre de k-combinaisons de E est le nombre $\binom{n}{k}$ défini par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

  Par convention, si $k < 0$ ou $k > n$ on pose $\binom{n}{k} = 0$. On le lit « k parmi n ».

- Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\qquad (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

E Nombre de sous-ensembles.

Proposition 5

Soit E un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini et on a :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{\mathrm{Card}(E)} = \mathrm{Card}\left(\mathcal{A}(E, [\![0,1]\!])\right) = \mathrm{Card}([\![0,1]\!])^{\mathrm{Card}(E)} = 2^n$$

F Méthodes.

Méthode-exemple 1 (calcul des coefficients binomiaux)

On sera amenés à calculer des coefficients binomiaux "à la main".

- Retenir les formules du cours : $\binom{n}{0} = \binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, "miroir", et $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
- Savoir construire le triangle de Pascal (et connaitre la formule de Pascal)
- Connaitre les formules :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times ... \times 1}$$

Pour déterminer $\binom{10}{4}$:

$$\binom{10}{4} = \frac{\overbrace{10 \times 9 \times 8 \times 7}^{4 \text{ facteurs}}}{\underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{4 \text{ facteurs}}} \underbrace{=}_{\textbf{Simplifier !!!}} = \frac{10 \times 3 \times 7}{1} = 210$$

Méthode-exemple 2 (Suite de combinaisons.)

Dans le cas d'une urne avec 5 boules blanches, 3 noires et 2 rouges. On tire simultanément 5 boules.
• Le nombre de possibilités totales est simplement $\binom{10}{5}$.
• le nombre de possibilités avec 3 blanches et 2 noires est :

$$\underbrace{\binom{5}{3}}_{3 \text{ B parmi } 5} \times \underbrace{\binom{3}{2}}_{2 \text{ N parmi } 3} \times \underbrace{\binom{2}{0}}_{0 \text{ R parmi } 2} = 10 \times 3 \times 1 = 30$$

Méthode-exemple 3 (anagramme)

Le nombre d'anagrammes de "anagramme" (attention ici on considère toutes les mots : avec ou sans sens) :

- On réfléchit en termes "d'emplacements". Il y en a 9 ici (puisque 9 lettres)
- On dénombre le nombre de représentants de chaque lettre :
  - 3 "a"
  - 2 "m"
  - 1 pour les 4 autres lettres.
- Il y a $\binom{9}{3} = 84$ façons de placer les "a".
- Il ne reste plus que $9 - 3 = 6$ emplacements possibles pour les "m" et donc $\binom{6}{2} = 15$ façons de placer les 2 "m".
- Ensuite pour le "n" : $\binom{4}{1} = 4$ (puisqu'il ne reste que 4 emplacements)
- Ensuite pour le "g" : $\binom{3}{1} = 3$
- Ensuite pour le "r" : $\binom{2}{1} = 2$
- Ensuite pour le "e" : $\binom{1}{1} = 1$

Le nombre de possibilités au total est donc :

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 84 \times 15 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$