Chapitre 15 : Fonction exponentielle.

I Approche Globale.

A Attendus.

- Savoir manipuler les propriétés algébriques de l'exponentielle pour simplifier une expression.
- Résoudre des équations et inéquations avec la exponentielle.
- Savoir déterminer les variations faisant intervenir l'exponentielle.
- Connaitre les formules de dérivation et déterminer les dérivées de fonctions faisant intervenir l'exponentielle (e^x).
- Savoir utiliser la formule $(e^u)' = u'e^u$.
- Résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir l'exponentielle.
- Faire une étude de fonction faisant intervenir l'exponentielle : calcul de la dérivée et tableau de variation .

B Démonstrations à connaître.

- Unicité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = f(x)$$

- Propriétés algébriques de l'exponentielle.
  - $e^{x+y} = e^x \times e^y$
  - $e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$
  - $(e^x)^y = e^{xy}$
  - $(e^{nx} = (e^x)^n$

II Définition.

Définition-Proposition 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = f(x) \tag{1}$$

Cette unique solution est appelée fonction exponentielle et est notée :

$$\exp(x) \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{e}^x$$

Corolaire 2

La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même :

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Si l'on considère une fonction u dérivable alors :

$$\exp(u(x))' = u' \times \exp(x)$$

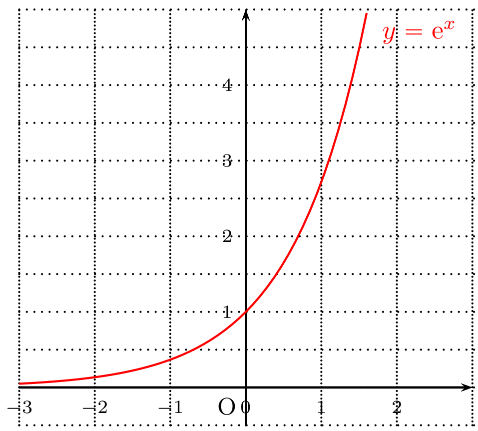
Que l'on note aussi : $(e^u)' = u'e^u$.

Ex 1 à 3 page 192.

III Étude de la fonction exponentielle.

A Tableau de variations et représentation graphique ;

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
ϵ^x	0,018	0,05	0,135	0,368	1	2,718	7,389	20,086	24,598

Vidéo 1 (Construction de la fonction exponentielle)

La construction de l'exponentielle peut se faire par l'utilisation des tangentes point par point : Méthode d'Euler.

B Limites.

Proposition 3

- $\lim_{x \to -\infty} exp(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$

C Équations et inéquations.

Proposition 4

Soit a et b deux réels. Alors :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Ex 19 à 23 page 194

D Propriétés algébriques et fonctionnelles.

Proposition 5

Si l'on reprend les propriétés de la partie précédente avec l'écriture fonctionnelle, pour tous x et y réels et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(y - x) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(x)}$
- $\exp(x)^y = exp(xy)$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

- $e^0 = 1$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $(e^{nx} = (e^x)^n$

Ex 4 à 14 page 192