Chapitre 10 : Géométrie vectorielle.

I Attendus

- Décomposer avec la relation de Chasles. *(1 page 295)*
- Démontrer qu'un point appartient à un plan. *(8 page 297)*
- Démontrer que des vecteurs sont coplanaires. *(12 page 299)*
- Utiliser un repère pour passer à des démonstrations analytiques. *(17 page 301)*
- Écrire une représentation paramétrique de droites et de plans. *(18 page 301)*

II Vecteurs de l'espace

A Définitions

Définition 1

À tout couple $(A;B)$ de points de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini de la façon suivante :

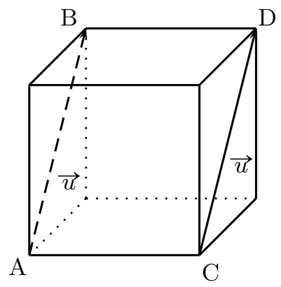
— Si $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a :
- pour **direction** celle de la droite (AB) ;
- pour **sens** celui de A vers B ;
- pour **norme** la longueur AB. On note $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

— Si $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, on le note $\overrightarrow{0}$.

Définition 2 (Égalité de deux vecteurs)

— Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** signifie que $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.
Dans ce cas, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont les **représentants** d'un même vecteur $\overrightarrow{u}$.
On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

— Pour tout point E de l'espace et tout vecteur $\overrightarrow{v}$, il existe un unique point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{v}$.



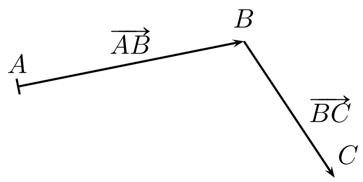
Remarque : Deux vecteurs non nuls sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même norme.

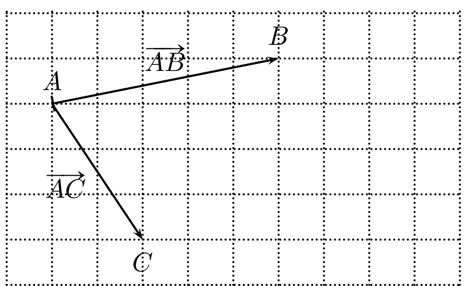
B Opérations sur les vecteurs

Les opérations sur les vecteurs du plan s'étendent aux vecteurs de l'espace.

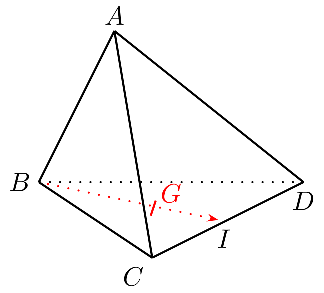
Rappels

Relation de Chasles
Pour tous points A, B et C de l'espace on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.





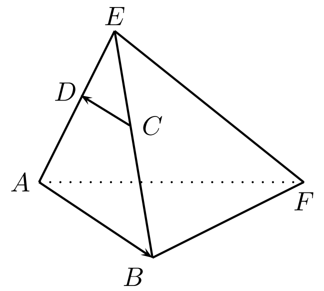
Règle du parallélogramme
Soit A, B et C trois points distincts. La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$, où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



Exemple 1. ABCD est un tétraèdre de l'espace. I est le milieu de l'arête $[CD]$. G est le centre de gravité du triangle BCD.
Montrons que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$

Exercices 2 à 7 page 295 puis 25 à 32 page 303

C Colinéarité, parallélisme et alignement



Définition 3

Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Proposition 1

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$.

Proposition 2

Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Théorème 3

A et B sont deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$, avec t réel.

Vidéo 1

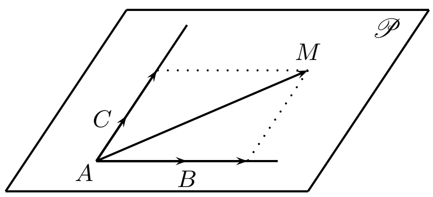
Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs

Exercices 10 et 11 page 297.

III Vecteurs coplanaires

Théorème 4

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace et soit $\mathscr{P}$ le plan (ABC).
Un point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.



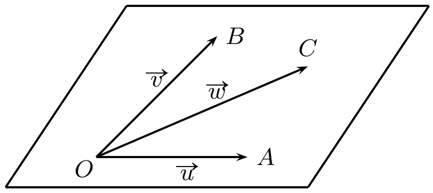
De façon générale, un plan est défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On parle alors du plan $(A;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des **vecteurs directeurs** de ce plan.

Proposition 5

Deux plans qui ont deux vecteurs directeurs en commun sont parallèles.

Définition 4

Dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** signifie que pour un point O quelconque de l'espace, les points O, A, B et C définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$ sont dans un même plan.



Proposition 6

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe des nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

Conséquences

1. Dire que 4 points A, B, C et D sont **coplanaires** équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
2. Dire que les droites (AB) et (CD) sont **coplanaires** équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
3. Dire que deux plans sont parallèles équivaut à dire que deux vecteurs non colinéaires de l'un et deux vecteurs non colinéaires de l'autre sont coplanaires.

Exercices 13 à 15 page 299 puis 33 à 50 page 303 à 305

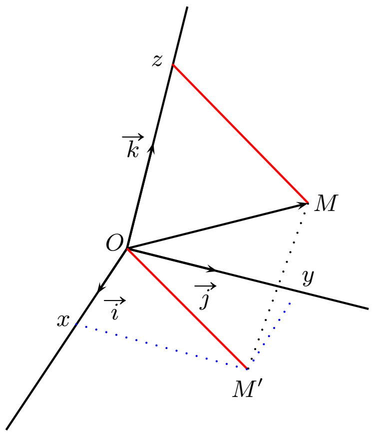
IV Repérage dans l'espace

Définition 5

Un **repère de l'espace**, noté $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ est formé d'un point O et d'un triplet $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ de vecteurs non coplanaires.

Proposition 7

$(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.



Vocabulaire : $(x; y; z)$ sont les coordonnées du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$.
x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote du point M dans ce repère.

Théorème 8

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs **non coplanaires**.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{V}$, il existe un unique triplet de nombres $(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{V} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$.
$(x; y; z)$ sont les **coordonnées de** $\overrightarrow{V}$ dans la base $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w})$.

Calculs sur les coordonnées

— Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ alors :

- le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées ....

- pour tout réel λ, le vecteur $\overrightarrow{\lambda u}$ a pour coordonnées ....

— Si A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$ alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ....

- le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées ....

— Si le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$ est orthonormé alors : $||\vec{u}|| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ et

$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercices 51 à 68 page 305 à 306

V Représentations paramétriques

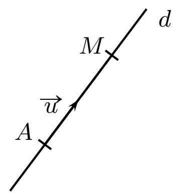
$(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$ est un repère de l'espace.

A Paramétrage d'une droite

d est la droite passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et admettant le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a; b; c)$ pour vecteur directeur.

Dire qu'un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à d équivaut à dire qu'il existe un nombre réel t tel que $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ c'est-à-dire tel que :

$$(S)\begin{cases} x = \dots\dots\dots\dots \\ y = \dots\dots\dots\dots \\ z = \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$



Définition 6

Le système (S) est une **représentation paramétrique** de la droite d et t est le **paramètre** de cette représentation.

Conséquence : Lorsqu'une représentation paramétrique d'une droite d est écrite sous la forme (S), on peut alors affirmer que d passe par $A(x_A; y_A; z_A)$ et que $\vec{u}(a; b; c)$ est un vecteur directeur de d.

Exemple 2. La représentation paramétrique d'une droite d est $d : \begin{cases} x = -2t \\ y = t + 1 \\ z = t - 2 \end{cases} \;,\quad t \in \mathbb{R}$.

Donner un point de d ainsi qu'un vecteur directeur. Le point $N(-4; 3; 0)$ appartient-il à d ?

Exercices 19 page 301 puis 69 à 74 page 306

B Paramétrage d'un plan

Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$.
Le plan $\mathscr{P}(A, \vec{u}; \vec{v})$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$, avec s, t réels. Autrement dit :

$$M(x; y; z) \in \mathscr{P} \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R} \text{ tels que } \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$$

$$\iff \begin{cases} \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \;,\quad t \in \mathbb{R},\quad s \in \mathbb{R}$$

On dira donc que le système $(S)\begin{cases} \dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \;,\quad t \in \mathbb{R},\quad s \in \mathbb{R}$

est une **représentation paramétrique du plan** $\mathscr{P}(A, \vec{u}; \vec{v})$.

Vidéo 2

Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

Exercices 75-76 page 306