

Chapitre 10 : Logarithme népérien.

A Définition

Définition 1

On dit que la fonction exp est une bijection de \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$.

Si $e^x = y$, on dit que x est le logarithme népérien de y .

La fonction logarithme népérien, notée \ln , est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui, à tout réel $x > 0$, associe le nombre noté $\ln(x)$ ou $\ln x$ dont l'exponentielle vaut x .

Pour la fonction exponentielle.

La fonction dérivée est $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$.

on a le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$		+	
exp		0	$+\infty$

La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . D'après le TVI chaque y valeur de $]0; +\infty[$ admet un unique antécédent que l'on notera $\ln y$:

$$\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

On définit ainsi la fonction \ln défini sur $]0; +\infty[$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

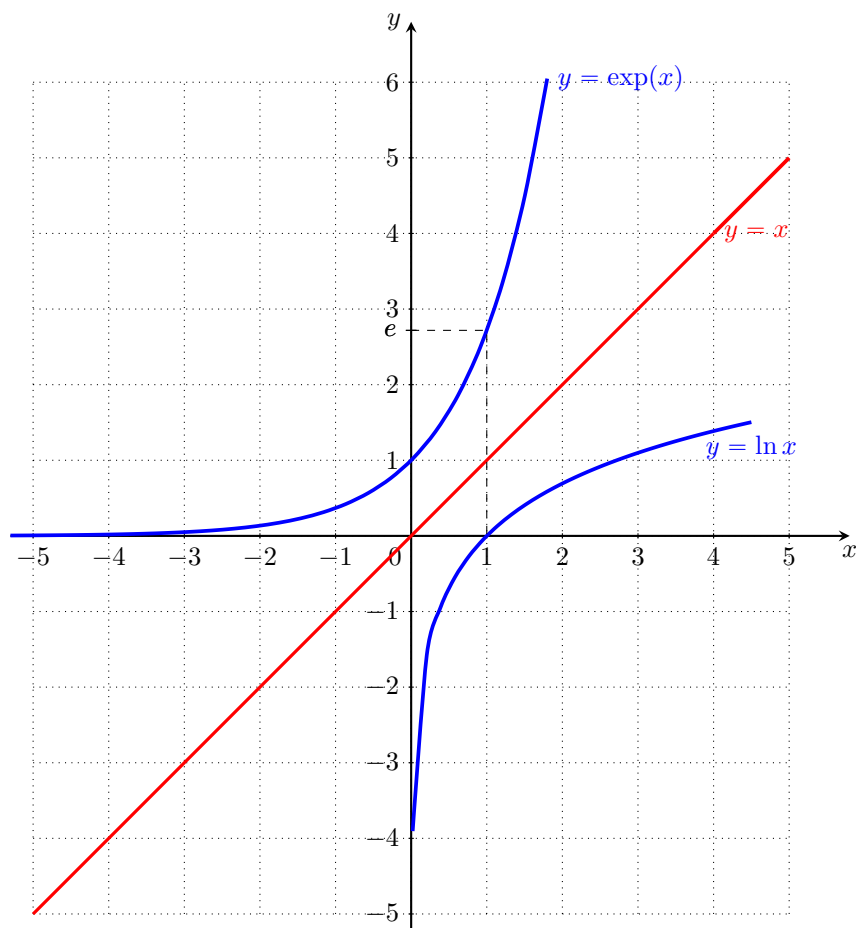
En utilisant l'expression

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ donc } (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

On obtient $\ln'(X) = \frac{1}{X}$ en posant $X = e^x \in]0; +\infty[$.

La tableau de variation est :

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+	
ln		$-\infty$	$+\infty$



Proposition 1

- $\forall x \in]0, +\infty[, e^{\ln x} = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x.$

Proposition 2

Soient a et b deux réels de $]0, +\infty[.$

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b.$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b.$
- $\ln a < 0 \Leftrightarrow a < 1.$
- $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1.$

B Propriétés algébriques**Proposition 3**

Pour $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(y) - \ln(x)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

C Limites remarquables et croissance comparée.**Proposition 4**

Pour tout nombre réel $\alpha > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ et, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$ En particulier : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
 Ordre de prépondérance en $+\infty$: " $\ln x \ll x^\alpha \ll e^x$ "

Pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0.$ En 0, on a l'ordre de prépondérance : " $e^x \ll x^\alpha \ll \ln x$ "
 En particulier, pour $\alpha = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$

Taux d'accroissement remarquable :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(Ce sont les coefficients directeurs des tangentes respectivement en 1 et 0 des courbes représentatives des fonctions \ln et $\exp.$)

D Dérivation**Proposition 5**

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad (\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$