Chapitre 10 : Variables aléatoires discrètes réelles.

I Un peu d'histoire.

La notion de variable aléatoire est née en même temps que le calcul des probabilités sans toutefois être repérée comme telle. C'est au cours du $XVIII^{ième}$ siècle qu'ont été découvertes la plupart des propriétés d'une variable aléatoire.
Le véritable début de la théorie des probabilités date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654 au sujet d'une désormais célèbre question posée par Antoine Gombaud (dit chevalier de Méré) : le problème des partis ou problèmes des points :

Deux joueurs A et B jouent une partie en plusieurs coups ; à chaque coup, chaque joueur a la même probabilité de gagner. Le premier qui a gagné trois coups ramasse l'enjeu qui est de 64 pistoles, chaque joueur ayant misé 32 pistoles au début du jeu. Soudain les joueurs aperçoivent la police et doivent interrompre le jeu avant la fin de la partie. Comment faut-il partager l'enjeu ?

Pascal en donna le premier la solution, mais pour le cas de deux joueurs seulement ; il fut ensuite résolu pour Fermat, dans le cas général d'un nombre quelconque de joueurs.
On peut considérer que les origines du « calcul des probabilités » remontent au XVIIe siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler, d'Alembert appliquent les notions de variable aléatoire et d'espérance à des problèmes issus de questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie. Ce n'est que vers 1930 que la description actuelle, en termes d'univers, s'est imposée. Elle permet une formalisation souple dans laquelle l'univers joue le rôle de « source d'aléas ». La notion de variable aléatoire, présente sans définition précise depuis l'origine de la discipline, apparaît alors comme une fonction définie sur l'univers.

II Attendus

- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire. *(1 page 311)*
- Savoir déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire. *(2 page 311)*
- Savoir calculer la probabilité d'un évènement. *2 page 311)*
- Savoir déterminer l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire à partir de sa loi de probabilité. *(1 page 313)*

III Variables aléatoires discrètes.

A Exemple.

Exemple 1. Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à 6 faces.
L'univers des possibles $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Maintenant, on considère que la personne qui lance le dé reçoit :

- 50 €, s'il obtient le nombre 6 lors du lancé .
- 20 €, s'il obtient les nombre 4 ou 5 lors du lancé.
- il donne 30 € sinon.

Si l'on note la fonction X qui au résultat du lancer donne la somme obtenu par le joueur. On obtient par exemple :

$$X(6) = 50 \quad ou \quad X(1) = -30$$

On a :

$$X : \Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \to X(\Omega) = \{-30, 20, 50\}$$

Si l'on cherche la probabilité que le joueur gagne 50 €, on obtient $\frac{1}{6}$.
On notera simplement :

$$P(X = 50) = \frac{1}{6}$$

On définit ainsi la **loi de probabilité** de X :

$x_i \in X(\Omega) = \{-30, 20, 50\}$	-30	20	50
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On remarquera que la somme des probabilités fait bien 1.

Exemple 2. Si l'on considère l'expérience qui consiste à lancer une pièce. Ensuite au affecte 1 lorsque l'on obtient "face" et 0 si l'on obtient "pile". On définie ainsi une variable aléatoire Y tel que :

$$Y : \Omega = \{Pile\ ,\ Face\} \to Y(\Omega) = \{0, 1\}$$

La loi de probabilité, si la pièce est équilibrée, est donné par :

$y_i \in Y(\Omega) = \{0, 1\}$	0	1
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

B Définition.

Définition 1

Si pour une expérience aléatoire, on note Ω l'ensemble des issues possibles.
On appelle **variable aléatoire réelle** toute application à valeurs réelles de Ω.
(C'est-à-dire $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to X(\Omega) \subset \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Si $X(\Omega) = (x_i)_{i \in D}$ avec $D \subset \mathbb{N}$ (avec $x_i \in \mathbb{R}$), on parlera de variable aléatoire réelle discrète.
Cette année on rencontrera essentiellement le cas où $D = [\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
La donnée des valeurs de $P(X = x_i)$ sera appelée **la loi de probabilité** de la variable X.

Proposition 1

La somme des probabilités vaut 1 :

$$\sum_{i \in D} P(X = x_i) = 1$$

Vidéo 1

Déterminer une loi de probabilité 1 et Vidéo 2

Ex 1 à 21 page 324 à 326 : faire en priorité les exercices verts.

C Espérance et variance.

Définition 2

Avec les notations de la définition précédente, l'espérance si elle existe est définie par :

$$E(X) = \sum_{i \in D} x_i P(X = x_i)$$

La variance, si elle existe est définie par :

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

Et enfin l'écart type (si la variance existe) est définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple 3. En reprenant l'exemple 1, où un joueur lance un dé et reçoit :

- 50 €, s'il obtient le nombre 6 lors du lancé .
- 20 €, s'il obtient les nombre 4 ou 5 lors du lancé.
- il donne 30 € sinon.

Si on note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur. On obtient ainsi la **loi de probabilité** de X :

$x_i \in X(\Omega) = \{-30, 20, 50\}$	-30	20	50
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Pour obtenir l'espérance procédons comme le calcul de la moyenne en statistique :

$$E(X) = -30 \times \frac{1}{2} + 20 \times \frac{1}{3} + 50 \times \frac{1}{6} = \frac{-90 + 40 + 50}{6} = 0$$

On pourra interpréter cette valeur : "Si le joueur joue un grand nombre de fois, la moyenne de ses gains tend vers 0 €. Le jeu n'est donc ni favorable ni défavorable au joueur." Pour le calcul de la variance :

$$V(X) = (-30)^2 \times \frac{1}{2} + 20^2 \times \frac{1}{3} + 50^2 \times \frac{1}{6} - 0^2 = 1000$$

L'écart type est donc :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$$

Cette valeur donne une mesure du **risque**. Ces valeurs de dispersion ne sont intéressantes que dans le cas d'étude de plusieurs variables à comparer.

Ex 23 à 41 page 326 à 328 : faire en priorité les exercices verts.

D Propriétés de l'espérance, de la variance et de l'écart type.

Proposition 2

Avec les notations de la définition précédente. Soient a et b deux réels. On a : $E(aX + b) = aE(X) + b$

Démonstration 1.

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{i \in D} (ax_i + b)P(X = x_i) = \sum_{i \in D} (ax_i P(X = x_i) + bP(X = x_i)) \\ &= \underbrace{a \sum_{i \in D} x_i P(X = x_i)}_{E(X)} + \underbrace{b \sum_{i \in D} P(X = x_i)}_{1} = aE(X) + b \end{aligned}$$

Proposition 3

On peut aussi calculer la variance par la formule :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \left(\sum_{i \in D} x_i^2 P(X = x_i)\right) - E(X)^2$$

Proposition 4

Si a et b sont deux réels on obtient :

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

Et donc :

$$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

Démonstration 2. Cette démonstration repose sur la formule $E(aX+b) = aE(X)+b$.

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left[(X-E(X))^2\right] = E\left[\left(X^2 - 2\times E(X)\times X + E(X)^2\right)\right] \\ &= E\left(X^2\right) + E\left[-2\times E(X)\times X\right] + E\left(E(X)^2\right) \\ &= E\left(X^2\right) - 2\times E(X)\times E\left(X\right) + E(X)^2 \\ &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Démonstration 3.

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= E\left((aX+b-E(aX+b))^2\right) = E\left((aX+b-aE(X)-b)^2\right) \\ &= E\left(a^2\times(X-E(X))^2\right) = a^2E\left((X-E(X))^2\right) = a^2V(X) \end{aligned}$$

Démonstration 4.

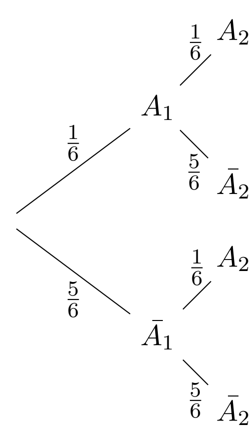
$$\sigma(aX+b) = \sqrt{V(aX+b)} = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X)$$

Vidéo 2

Paramètre d'une V.A.R.D : Vid 1 , Vid 2. Vid 3 Si $Y = aX+b$ enfin QCM

IV Répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes.

Exemple 4. Considérons l'expérience qui consiste à lancer 2 fois un dé à 6 faces et de compté le nombre de fois où l'on obtient la valeur 1. Si l'on note A_i l'évènement "obtenir la valeur 1 au $i^{ième}$ lancé". On peut modéliser cette expérience sous la forme d'un arbre :



Si l'on note X le nombre de 1 que l'on obtient lors de ces 2 lancés. On définie ainsi une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$	$P((\bar{A}_1\cap A_2)\cup(A_1\cap\bar{A}_2)$ $= \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	$P(A_1\cap A_2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $P(A_1\cap A_2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$