Chapitre 11 : Applications de la dérivation.

Notation : dans ce chapitre f désignera une fonction continue et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

I Attendus

- Savoir étudier les variations d'une fonction à partir du signe de sa fonction dérivée et dresser un tableau de variations. *1 page 149*
- Déterminer les extrema d'une fonction à partir du signe de la fonction dérivée. *2 page 149*
- Savoir analyser ses erreurs à partir de la lecture d'un tableau de variation.
- Savoir relier le graphique au tableau pour vérifier ces résultats.
- Déterminer le nombre de solutions d'une équation à partir de la lecture d'un tableau de variation.
- Déterminer les extrema locaux à partir du tableau de variations.
- Résoudre des inégalités à l'aide d'une étude de fonction.

II Calculs de dérivées.

Fonction	Intervalle de dérivabilité	Dérivée
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{n}{x^{n+1}}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$

Si u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k un réel, alors :

Fonction	Dérivée
ku	ku'
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u'v + uv'$
$\dfrac{1}{u}$ avec u non nulle sur I	$\dfrac{-u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$ avec v non nulle sur I	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$, avec u strictement positive	$x \mapsto \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n, avec n entier naturel non nul	$nu'\ u$
$\dfrac{1}{u^n}$, avec n entier naturel non nul	$\dfrac{-n}{u^{n+1}}$
$f(x) = g(ax+b)$ avec a, b réels et f et g définies et dérivables	$f'(x) = ag'(ax+b)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$

Exemple 1. Dériver chacune des fonctions suivantes (sans justification sur l'existence de la dérivée) :

$$a(x) = x^3 - 2x - 1; \quad b(x) = 4\cos(x) \ ; \quad c(x) = \sin(3x+\pi) \ ; \quad d(x) = 5\sin(3x+\pi) \ ;$$
$$f(x) = \frac{3-x}{x+1} \ ; \quad g(x) = \frac{1}{2-x} \ ; \quad h(x) = (x^3 - 2x^2 + 4)^5 \ ; \quad i(x) = \frac{1}{(x^2-3)^3} \ ;$$
$$n(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} \ ; \quad k(x) = \sin(x^2 + 3\pi) \ ; \quad l(x) = \sin(x^3 - 2x) \ ; \quad m(x) = 3\cos(1 + x^2)$$

Ex 1 à 15 page 160

III Sens de variation d'une fonction

Proposition 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Vidéo 1

Une étude de fonction.

Exemple 2. Dresser le tableau de variation des fonctions de l'exercice 5 et des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ c) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ d) $f(x) = \dfrac{3}{x+3} - \dfrac{2}{x+2}$

Exemple 3. f est la fonction définie par l'expression $f(x) = \dfrac{1}{-2x^2 + 4x - 3}$.

1. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = -2x^2 + 4x - 3$.
   Etudier les variations de g.
2. En déduire les variations de f puis le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Ex 16 à 28 page 161-162

IV Éxtrema d'une fonction

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Un **extremum** est un minimum ou un maximum.
- f présente un **maximum local** $m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- f présente un **minimum local** $m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
- L'extremum est dit **global** lorsque $J = I$.

Proposition 2

Si $f(x_0)$ est un extremum local sur l'intervalle $]a;b[$, alors $f'(x_0) = 0$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet une tangente horizontale au point $(x_0\ ;\ f(x_0))$.

Vidéo 2

Recherche d'un extrémum

Exemple 4. Ce théorème dit que : $f(x_0)$ extremum local $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$.

La réciproque : $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x_0)$ extremum local est FAUSSE.

Par exemple, soit $f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Ainsi, $f'(0) = 0$. Néanmoins $f(0)$ n'est ni un minimum ni un maximum local de f car pour $x < 0$, $f(x) = x^3 < 0 = f(0)$ et pour $x > 0$, $f(x) = x^3 > 0 = f(0)$.

Exemple 5. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{4x^2+1}$.

1. A l'aide de la calculatrice tracer $\mathcal{C}_f$ et localiser le maximum de f.
2. Vérifier par le calcul s'il s'agit bien d'un maximum de f.

Exemple 6. Soit f la fonction définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10$.

Rechercher les éventuels extrema locaux et globaux de f.

Exemple 7. La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v, pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression

$$C(v) = 0,06v + \frac{150}{v}\ .$$

A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

Ex 29 à 38 page 162-163

V Modélisation.

Exemple 8. La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v, pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression

$$C(v) = 0,06v + \frac{150}{v}\ .$$

A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

Ex 39 à 41 page 163 puis 79 page 169

VI Résolution d'équations

Proposition 3

Soit k un nombre réel, f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ telle que

- f est dérivable sur $[a;b]$
- f est strictement monotone sur $[a;b]$
- $f(a) < k < f(b)$ ou $f(a) > k > f(b)$

alors, il existe un unique $\alpha \in]a;b[$ tel que $f(\alpha) = k$.

Exemple 9. Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2;5]$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		4		5
			4				10
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	1				-3		

Déterminer le nombre de solutions, et l'intervalle où elles se situent, de l'équation
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = -5$

Exemple 10. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3;2]$.
Déterminer un encadrement plus précis de cette solution.

Exemple 11. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions, respectivement dans les intervalles $]-2;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;2[$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la plus grande de ces solutions.

VII Position relative de deux courbes.

Exemple 12. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = 4x^2 - 6x + 2$.

1. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f est au-dessus sa tangente en 2.
2. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f est au-dessus du toutes ses tangentes.

Exemple 13. *On dit que deux paraboles sont tangentes entre elles lorsqu'elles ont un point commun A et une tangente commune en A.*
A tout nombre $m \neq 0$, on associe la parabole $\mathcal{P}_m$ d'équation $y = mx^2 + (1-2m)x + m$.
Montrer que toutes ces paraboles sont tangentes entre elles.