Chapitre 11 : Loi à densité.

I Attendus.

- Savoir déterminer une probabilité quand on connait la densité. *(1 page 379)*
- Calculer une probabilité avec une loi uniforme. *(7-8 page 381)*
- Étudier une loi de durée de vie sans vieillissement. *(11 page 383)*
- Déterminer le paramètre d'une loi exponentielle. *(12 page 383)*

II Loi à densité sur un intervalle

A Variable aléatoire continue

Définition 1

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience. On le note Ω.
Une **variable aléatoire** X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1. On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe la somme des nombres obtenus.
L'univers Ω est l'ensemble des couples $(i;j)$ où i et j prennent des valeurs entières comprises entre 1 et 6.
Cette variable aléatoire est dite **discrète** car elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs : les entiers compris entre 2 et 12.

Définition 2

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire X définie sur Ω qui peut prendre comme valeur tous les nombres réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite **continue.**

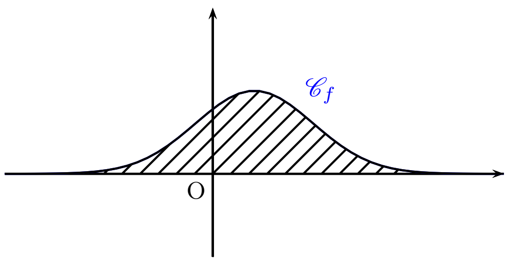
Exemple 2. Une entreprise produit des ampoules à basse consommation. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque ampoule produite par cette entreprise, associe sa durée de vie en heures.
Cette durée n'est pas nécessairement un nombre entier d'heures et théoriquement, on ne connaît pas la durée de vie maximale d'une telle ampoule.
X est donc une variable aléatoire **continue** et l'intervalle I est $[0;+\infty[$.

B Variable aléatoire suivant une loi à densité

Définition 3

Une fonction f définie et continue sur un intervalle I est appelée **densité de probabilité sur** I si :

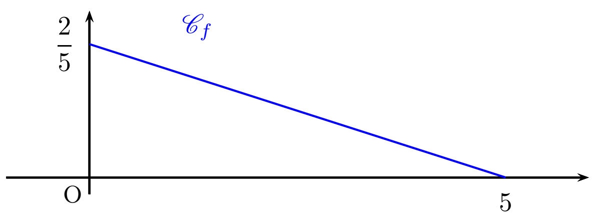
-
-



Exemple 3. On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & [0;5] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{-2}{25}x+\dfrac{2}{5} \end{array}$$

Montrons que f est une densité.



Définition 4

Soit f une densité de probabilité définie sur un intervalle I.
Dire qu'**une variable aléatoire X suit la loi de densité f** signifie qu'à tout intervalle J inclus dans I, on associe la probabilité $P(X \in J) = aire(\mathscr{D}_J)$ où $\mathscr{D}_J$ est le domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle J. Donc :

$$\int_J f(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 4. Si l'on reprend l'exemple précédent. On considère que X est le temps d'attente sur une plateforme téléphonique. Le temps d'attente est supérieur à 0 et inférieur à 5 min. La densité f est donnée par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & [0;5] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{-2}{25}x + \dfrac{2}{5} \end{array}$$

Pour déterminer :

- La probabilité que le temps d'attente soit compris entre 1 min et 3 min.

- La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 min.

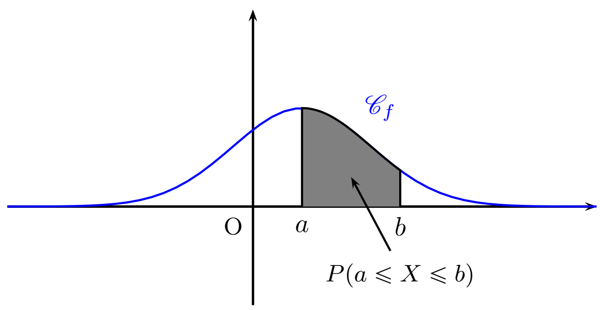
- La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 min.

Remarques

— Une telle variable aléatoire X est continue.

— $P\left(X \in [a;b]\right)$ pourra être noté $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

— $P(a \leqslant X \leqslant b)$ est donc égale à l'aire comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Conséquences

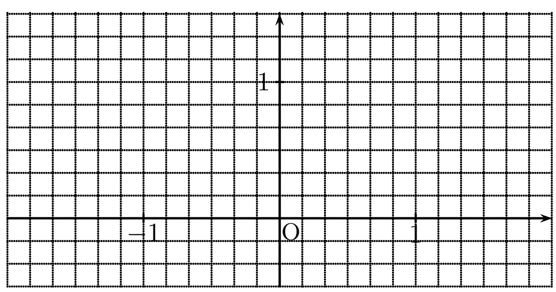
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur I.

1. Si $J = [c;d]$, $P(X \in J) = P(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d f(x)\ \mathrm{d}x$.
2. Pour tout nombre réel c de I : $P(X = c) = 0$. En effet, $P(X = c) = P(\ldots \leqslant X \leqslant \ldots) = \displaystyle\int_{\ldots}^{\ldots} f(x)\ \mathrm{d}x = \ldots$
3. $P(c \leqslant X \leqslant d) = P(c \leqslant X < d) = P(c < X \leqslant d) = P(c < X < d)$.
4. Si $I =]a;+\infty[$ et si $c > a$ alors : $P(X \geqslant c) = 1 - P(\ldots < X < \ldots) = 1 - \displaystyle\int_{\ldots}^{\ldots} f(x)\ \mathrm{d}x$

Exemple 5. Soit X une variable aléatoire continue dont la densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour calculer la probabilité de l'évènement $\left\{X \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right]\right\}$.



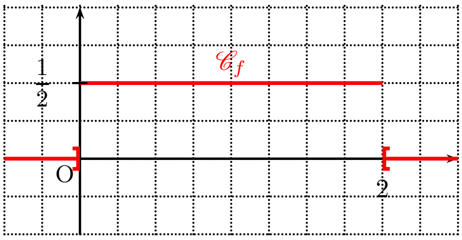
Exercices 2 à 6 page 379 puis 19 à 30 page 385

III Loi uniforme sur $[a;b]$

Exercice 1. Dans cet exercice, on considère la fonction densité définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ 0,5 & si\ 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 0 & si\ x\geqslant 2\end{cases}$$

1. On note X la variable aléatoire de densité f. On a la représentation graphique :



Déterminer les valeurs des probabilités suivantes :

a) $P(-1\leqslant X\leqslant 0)$
b) $P(0\leqslant X\leqslant 1)$
c) $P(0,5\leqslant X\leqslant 1)$
d) $P(X\leqslant 1)$
e) $P(X\geqslant 1)$
f) $P(X\geqslant 2)$

2. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^2 xf(x)\,\mathrm{d}x$
3. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

a) $P_{(X\geqslant 1)}(0\leqslant X\leqslant 0,5)$
b) $P_{(X\leqslant 1)}(0\leqslant X\leqslant 0,5)$
c) $P_{(X\geqslant 1)}(X\leqslant 1,5)$

A Définition et propriétés

Définition 5

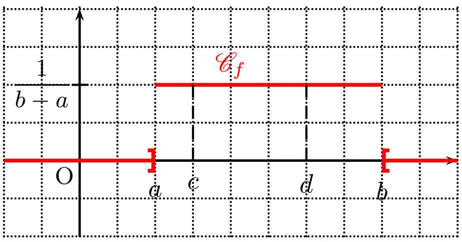
Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$.
Dire qu'une variable aléatoire continue X suit une **loi uniforme** sur $[a;b]$ signifie que sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } a\leqslant x\leqslant b \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. On note : X suit la loi $\mathscr{U}([a;b])$.

Remarque : la variable aléatoire X prend alors ses valeurs dans $[a;b]$.

Proposition 1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$.
Pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$, on a :

$$P(c\leqslant X\leqslant d)=\frac{d-c}{b-a}.$$



Exemple 6. On choisit un nombre dans l'intervalle $[3;8]$.
La variable aléatoire X qui indique le nombre choisi suit la loi uniforme sur $[3;8]$. On a alors :

$P(X=4)=\ldots$; $P(X>6)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots=\ldots\ldots$;

$P(5<X<\sqrt{50})=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots$.

B Espérance

Théorème 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a;b]$.
X admet une espérance $E(X)$ définie par $E(X) = \displaystyle\int_a^b xf(x)\ \mathrm{d}x$ égale à

Démonstration.

Exemple 7. Dans l'exemple précédent, on a : $E(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$

Exercices 9 et 10 page 381 puis 31 à 45 page 386

IV Lois exponentielles

Exercice 2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
2. Calculer les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. (b) $\displaystyle\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t$. (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t$. (d) $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$
4. On considère la variable aléatoire X, associée à la densité f. Déduire des résultats précédents les probabilités suivantes :

   (a) $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$. (b) $P(X \in [0,3])$. (c) $P(X \leqslant 3)$. (d) $P(X \leqslant x)$; ($x \in \mathbb{R}$)

5. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

   (a) $P_{(X\leqslant 1)}(X \geqslant 4)$. (b) $P_{(X\geqslant 1)}(X \geqslant 4)$. (c) $P_{(X\geqslant 10)}(X \geqslant 13)$.

A Durée de vie sans vieillissement

Soit X la variable aléatoire qui donne la durée de vie, en heures, d'une ampoule d'un certain type.
X prend ses valeurs dans ....
Soit $t \in [0;+\infty[$, «$X \geqslant t$» correspond à l'évènement : « La durée de vie est supérieure ou égale à t heures.

On dit que la durée de vie de cette ampoule est **sans vieillissement** lorsque la probabilité qu'elle fonctionne encore h heures supplémentaires sachant qu'elle fonctionne à l'instant t ne dépend pas de t.

C'est-à-dire que $P_{(X\geqslant t)}(X \geqslant t+h)$ ne dépend pas de t.

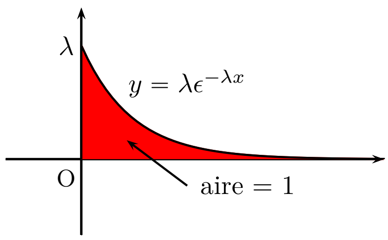
Définition 6

Une variable aléatoire à valeurs positives suit une loi **sans vieillissement** ou **sans mémoire** lorsque pour tous nombres positifs t et h, on a : $P_{(X\geqslant t)}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.

Exemple 8. Dans l'exemple d'introduction, la probabilité que la durée de vie de l'ampoule soit supérieure ou égale à 1 000 heures sachant qu'elle a déjà fonctionné 700 heures est $P_{X\geqslant 700}(X \geqslant 1\,000)$, soit avec $t = \ldots\ldots\ldots$ et

$h = \ldots\ldots\ldots$, $P_{X\geqslant 700}(X \geqslant 1\,000) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

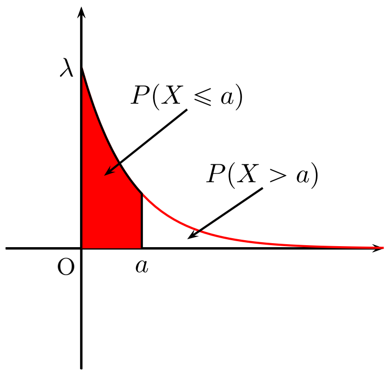
B Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$



Définition 7

Soit λ un réel strictement positif.
Dire qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0; +\infty[$ signifie que sa densité de probabilité est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda\epsilon^{-\lambda x}$.

Conséquences



Pour tous nombres a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$:

— $P(X \leqslant a) =$ ....

soit $P(X \leqslant a) =$ ....

— $P(X > a) =$ ....

— $P(a \leqslant X \leqslant b) =$ ....

Théorème 3

Une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est **sans vieillissement**.

Remarque : On admet que, réciproquement, les variables aléatoires à densité sans vieillissement suivent une loi exponentielle. Ainsi, les variables aléatoires qui suivent une loi exponentielle sont les seules variables aléatoires à densité sans vieillissement.

C Espérance

Théorème 4

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
X admet une espérance $E(X)$ définie par $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t)\, dt$ égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

Remarque : L'espérance peut ici s'interpréter comme la durée de vie moyenne.

Exercices 13 et 14 page 383 puis 46 à 54 page 387