Chapitre 12 : Résumé dérivation et primitives.

I Dérivation.

A Rappels sur les formules de dérivation.

Dérivées des fonctions usuelles

u	Dérivée u'	Sur
$k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$. $1+\tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$

.

Opérations sur les dérivées

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
$ku,\ k \in \mathbb{R}$	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$u^n \ (n \in \mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos \circ u$	$-u' \times \sin \circ u$
$\sin \circ u$	$u' \times \cos \circ u$

Si u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et v une fonction définie et dérivable sur un intervalle $J \subset u(I)$, alors :

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

II Primitive d'une fonction continue

Définition 1

Soit I un **intervalle**. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.
Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est dite être $\boxed{\textit{une}}$ primitive de f sur I si :

- F est dérivable sur I
- Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$

Proposition 1

Soit I un **intervalle**. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.
Si $F : I \to \mathbb{R}$ est **une** primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f est donné par :

$$\{F + K; K \in \mathbb{R}\}$$

Proposition 2 (Linéarité de la *primitivation*)

Soient f et g sont deux fonctions continues sur un même intervalle I. Si F et G sont deux primitives respectivement de f et g. Soient $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

Théorème 3 (Énoncé simplifié du **Théorème fondamental de l'analyse**)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Proposition 4

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = \lambda$.

A Primitives usuelles

Fonction	Intervalle	Une primitive
$\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \lambda x$
$n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln(\lvert x \rvert)$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$\alpha \in \mathbb{R}^* \backslash \{-1\}$, $x \mapsto x^\alpha$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
Si $a > 0$ et $a \neq 1$, $x \mapsto a^x$,	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{a^x}{\ln(a)}$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$

B Opérations sur les primitives.

La fonction u utilisé ci-dessous est une fonction continue de dérivée continue.

f	F (Une primitive)	Condition sur u
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	u ne s'annule pas sur I
Si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, $\frac{u'}{u^n}$,	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u strictement positive sur I
Si $\alpha \in \mathbb{R}^* \backslash \{1\}$, $u'u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	• u ne s'annule pas sur I si $\alpha \in \mathbb{Z}$ • u strictement positive sur I sinon
$u'e^u$	e^u	
$u' \times (\cos \circ u)$	$\sin \circ u$	
$u' \times (\sin \circ u)$	$-\cos \circ u$	
$v' \times (u' \circ v)$	$u \circ v$	

C Intégration par parties

Définition 2

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soit F une primitive de f sur l'intervalle I.
On notera alors dans ce chapitre $F = \int f$.

Théorème 5 (Intégration par parties)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit u et v deux fonctions continues et de dérivées continues sur I. Alors

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

D Changement de variables

Théorème 6

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I et u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que $u(J) \subset I$.
On a alors
$$\int (u' \times f \circ u) = \left(\int f\right) \circ u$$

III Méthodes.

A Dérivées partielles.

Méthode 1 (Calculs de dérivées partielles.)

$$c \quad : \quad \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(x)y + e^{xy} \end{array}$$ a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x} + ye^{xy} \qquad \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) = \ln(x) + xe^{xy}$$

B Calculs de primitives.

Méthode 2 (Reconnaitre la formule d'opérations sur les primitives à utiliser)

Pour primitiver les fonctions suivantes :

a) $a(x) = \cos(3x)$
b) $b(x) = 3\cos(3x) - 7\sin(5x)$
c) $c(x) = \sin x \cos x$
d) $d(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$
e) $d(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+5)^3}$
f) $e(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x+5}$
g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Pour chacune de ces expressions, il faut trouver la correspondance entre l'expression et la formule possible.

a) $\displaystyle\int u' \cos u = \sin u$
b) $\displaystyle\int u + v = \int u + \int v$ puis $\displaystyle\int u' \cos u = -\sin u$ et $\displaystyle\int u' \sin u = -\cos u$
c) La seule expression faisant intervenir un produit est $\displaystyle\int (v' \times u' \circ v) = u \circ v$
d) Deux expressions formules qui permettent de primitiver un quotient sont $\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$ et $\displaystyle\int \frac{u'}{u^n}$. Ici comme u est à la puissance 1. On choisit la première.
e) Deux expressions formules qui permettent de primitiver un quotient sont $\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$ et $\displaystyle\int \frac{u'}{u^n}$. Ici comme u est à la puissance 3. On choisit la seconde.
f) Ici la seule expression avec exp est $\displaystyle\int u'\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u$.
g) Là c'est moins facile, mais $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$ et l'on reconnait $\displaystyle\int u'u = \frac{u^2}{2}$.

Méthode 3 ($\int P(x)\mathrm{e}^x$)

Intégration par partie avec $v = P(x)$ et $u' = \mathrm{e}^x$. On fait autant d'intégration par partie que de degré du polynôme.

$$\int x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$$

Méthode 4 ($\int P(x)\sin x$)

Comme précédemment : Intégration par partie avec $v = P(x)$ et $u' = \sin x$. On fait autant d'intégration par partie que de degré du polynôme.

$$\begin{aligned}\int (x^2+3x+1)\sin x \,\mathrm{d}x &= -(x^2+3x+1)\cos x + \int (2x+3)\cos x \,\mathrm{d}x\\ &= -(x^2+3x+1)\cos x + (2x+3)\sin x - \int 2\sin x \,\mathrm{d}x\\ &= -(x^2+3x+1)\cos x + (2x+3)\sin x + 2\cos x\end{aligned}$$

Méthode 5 ($P(x)\ln x$)

Par intégration par partie en posant $u' = P(x)$ cette fois et $v = \ln x$:

$$\int x^2\ln x \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$$

Méthode 6 (Par changement de variable.)

Voir exemple précédent ou ci-dessous.
Pour le calcul de : $\int x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$
On propose le changement de variable $u = 1-x$ (donc $x = 1-u$).
On a $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}x$.

$$\int x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \int (1-u)^2\sqrt{u}(-\,\mathrm{d}u) = \int (-u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{-2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$$