Chapitre 12 : Dérivation et primitives.

I Dérivation.

A Rappels sur les formules de dérivation.

Dérivées des fonctions usuelles

u	Dérivée u'	Sur
$k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$. $1+\tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$

.

Opérations sur les dérivées

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
$ku,\ k \in \mathbb{R}$	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$u^n\ (n \in \mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos \circ u$	$-u' \times \sin \circ u$
$\sin \circ u$	$u' \times \cos \circ u$

Si u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et v une fonction définie et dérivable sur un intervalle $J \subset u(I)$, alors :

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

II Primitive d'une fonction continue

Dans toute cette partie, on utilisera à nouveau le résultat selon lequel :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de dérivée est nulle sur I alors f est constante sur I.

A Définition.

Définition 1

Soit I un **intervalle**. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.
Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est dite être $\boxed{\textit{une}}$ primitive de f sur I si :

- F est dérivable sur I
- Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$

B Propriétés

1 Ensemble des primitives

Proposition 1

Soit I un **intervalle**. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.
Si $F : I \to \mathbb{R}$ est **une** primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f est donné par :

$$\{F + K; K \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit F une primitive de f sur **l'intervalle** I.
Notons $E = \{F + K | K \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des primitives de F sur I.
$1^{ière}$ étape. Montrons $E \subset \mathcal{F}$, c'est-à-dire que toutes fonction de E est dans $E\mathcal{F}$.
Soit $K \in \mathbb{R}$, la fonction $F + K$ est dérivable sur I en tant que somme de fonctions dérivables et on a $(F + K)' = F' = f$.
Ainsi $F + K$ est une primitive de f et $E \subset \mathcal{F}$.
$2^{ième}$ étape. Montrons $\mathcal{F} \subset E$. C'est à dire que si G est une primitive de f alors :

$$\exists K \in \mathbb{R},\ G = F + K$$

Soit donc G une primitive de f.
La fonction $G - F$ est dérivable sur I et on a

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$$

La fonction $G - F$ est donc constante sur l'intervalle I. Notons K la fonction constante telle que $G - F = K$ sur I, alors $G \in E$. Donc $\mathcal{F} \subset E$.
Finalement l'ensemble des primitives de f sur I est bien $\{F + K\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 1. Si l'on considère la fonction $\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{|x|}{x} \end{array}$.

La dérivée de cette fonction est $f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et pourtant la fonction n'est pas constante.
En effet :

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Donc sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ comme sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$F'(x) = 0$$

Or la fonction F n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 1. On définit les fonctions f et F par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (x^2 + 4x + 3)\mathrm{e}^x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (x^2 + 2x + 1)\mathrm{e}^x \end{array}$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$. On définie les fonction F et G sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(|x|) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} G & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Étudier la parité de la fonction F et déterminer l'expression de sa dérivée. Que peut-on dire de F et f.
2. Déterminer l'expression de la dérivée de G.
3. La fonction $G - F$ est-elle constante ?

Exemple 2. Que peut-il se passer lorsque lorsque I n'est pas un intervalle :
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

Les fonctions $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(|x|) \end{array}$ et $G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \ln(x)+1 & \text{si } x>0 \\ \ln(-x)+3 & \text{si } x<0 \end{cases} \end{array}$

sont deux primitives de f sur $\mathbb{R}^*$ mais $G-F$ n'est pas une fonction constante.

Proposition 2 (Linéarité de la *primitivation*)

Soient f et g sont deux fonctions continues sur un même intervalle I. Si F et G sont deux primitives respectivement de f et g. Soient $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

Remarque 1. On parlera plus tard de la linéarité de l'intégrale. Attention la primitivation ne peut pas être vu comme un opérateur linéaire puisque ce n'est pas une application ("l'image" connue à une constante près)

Démonstration 2. Soient f et g sont deux fonctions continues sur un même intervalle I et F et G sont deux primitives respectivement de f et g. Soient $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g$$

Donc $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

Le principal résultat d'existence de primitives est le suivant :

Théorème 3 (Énoncé simplifié du **Théorème fondamental de l'analyse**)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Remarque 2. Dans la plupart des cas on ne peut pas exprimer cette primitive à l'aide des fonctions usuelles

Démonstration. Admise □

On peut affiner un peu ce résultat.

Proposition 4

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = \lambda$.

Démonstration 3. Démonstration de l'unicité :
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soient F et G deux primitives de f vérifiant $F(x_0) = \lambda$ et $G(x_0) = \lambda$.
Alors $(F-G)' = f - f = 0$ donc $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ (F-G)(x) = K$. Or $F(x_0) - G(x_0) = 0$ donc $K = 0$. Donc $F = G$.

C Primitives usuelles

Fonction	Intervalle	Une primitive
$\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \lambda x$
$n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
Si $a>0$ et $a \neq 1$, $x \mapsto a^x$,	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{a^x}{\ln(a)}$
$a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $x \mapsto x^a$	$]0,+\infty[$	$x \mapsto \frac{x^{a+1}}{a+1}$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$

D Opérations sur les primitives.

La fonction u utilisé ci-dessous est une fonction continue de dérivée continue. Par ailleurs quand nécessaire pour la fonction f, on considérera que les image de u sont non nul.

Remarque 3. Attention la primitive d'un produit n'est pas le produit des primitives.

f	F (Une primitive)	Condition sur u
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	u ne s'annule pas sur I
Si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, $\frac{u'}{u^n}$,	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u strictement positive sur I
$u'e^u$	e^u	
$v' \times (u' \circ v)$	$u \times v$	

Exemple 3. Pour déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

- $f : x \mapsto e^{2x} + 3e^x + 2$
- $g : x \mapsto \dfrac{x}{(4+x^2)^3}$
- $h : x \mapsto \sin^3(x)\cos(x)$
- $i : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^2 + 2}$

Exercice 3. Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3(x-1)^2 \end{array}$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12-13 fiche du TD

E Intégration par parties

Définition 2

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soit F une primitive de f sur l'intervalle I. On notera alors dans ce chapitre $F = \displaystyle\int f$.

Théorème 5 (Intégration par parties)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit u et v deux fonctions continues et de dérivées continues sur I. Alors

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

Démonstration 4. On a $(uv)' = u'v + uv'$. Ainsi

$$uv = \int (uv)' = \int (u'v + uv') \underbrace{=}_{\text{Linéarité.}} \int u'v + \int uv'$$

Donc :

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

Exemple 4. Calculons les primitives des fonctions suivantes :

- $\displaystyle\int x e^x \ dx = xe^x - \int e^x \ dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$
- $\displaystyle\int x\cos(x) \ dx$

  Prenons $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x$, alors $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = 1$. D'où

$$\int x\cos(x) \ dx = x\sin(x) - \int \sin(x) \ dx = x\sin(x) - \cos(x)$$

Remarque 4. Ce premier exemple est explicitement à connaitre dans le programme.

- $\displaystyle\int (t^2+t-1)\sin(t)\,\underset{\cdot}{t}$

  On prend $u(t) = -\cos(t)$ et $v(t) = t^2+t-1$ d'où $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = 2t+1$. Ainsi

$$\int (t^2+t-1)\sin(t)\,\underset{\cdot}{t} = \left[-\cos(t)(t^2+t-1)\right] + \int \cos(t)(2t+1)\,\underset{\cdot}{t}$$

  On prend ensuite $a(t) = \sin(t)$ et $b(t) = 2t+1$, d'où $a'(t) = \cos(t)$ et $b'(t) = 2$
  Alors

$$\int \cos(t)(2t+1)\,\underset{\cdot}{t} = \sin(t)(2t+1) - \int 2\sin(t)\underset{\cdot}{t} = \left[\sin(t)(2t+1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - -2\cos(t)$$

  Finalement

$$\begin{aligned}\int (t^2+t-1)\sin(t)\,\underset{\cdot}{t} &= -\cos(t)(t^2+t-1) + \sin(t)(2t+1) - (-2\cos(t))\\ &= -\cos(t)(t^2+t-1) + \sin(t)(2t+1) + 2\cos(t)\end{aligned}$$

- La fonction ln.

  Prenons $u(t) = t$ et $v(t) = \ln(t)$. Alors $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$. D'où

$$\begin{aligned}\int \ln(t)\ \mathrm{d}t &= t\ln t - \int t\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\\ &= t\ln(t) - t\end{aligned}$$

  Donc $t \mapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

F Fonctions de deux variables

1 Généralités

Définition 3

On appelle fonction réelle de deux variables réelles toute application d'une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, ce que l'on note $f : D \to \mathbb{R}$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles. On appelle ensemble de définitions de f noté D_f l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $f(x, y)$ est bien définie.

> *Remarque* 5. Le programme dit « Aucune difficulté ne sera soulevée au sujet des domaines de définition des fonctions considérées. »

Définition 4

Soit $D =]a, b[\times]c, d[$ un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables. Soit $(x_0, y_0) \in D$
On appelle fonctions partielles de f en (x_0, y_0) les deux applications suivantes

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]a,b[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & f(t, y_0)\end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc}]c,d[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & f(x_0, t)\end{array}$$

On notera alors $f_1 = f(\blacksquare, y_0)$ et $f_2 = f(x_0, \blacksquare)$.

> *Remarque* 6. Les fonctions partielles dépendent évidemment de (x_0, y_0) mais la dépendance n'apparait pas dans les écritures f_1 et f_2, on s'assurera donc que le contexte est clair

Exemple 5.

- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x+y\end{array}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

  Les fonctions partielles en (x_0, y_0) sont alors

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & t+y_0\end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & x_0+t\end{array}$$

- Soit $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & \ln(x)y + e^{xy}\end{array}$

  Les fonctions partielles en $(1, 2)$ sont

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & 2\ln(t) + e^{2t}\end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & e^t\end{array}$$

- Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y+3 \end{array}$

  Les fonctions partielles en $(0,0)$ sont

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 3 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t+3 \end{array}$$

2 Surface représentative.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, tout point (x,y,z) peut être repéré par son abscisse x, son ordonnée y et sa côte z, de manière similaire aux fonctions d'une variable où on représentait la fonction f par les points de coordonnées $(x, f(x)$ on va alors représenter une fonction de deux variables f par les points de coordonnées $(x,y,f(x,y))$.

Définition 5

Soit D un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On appelle surface représentative de f l'ensemble

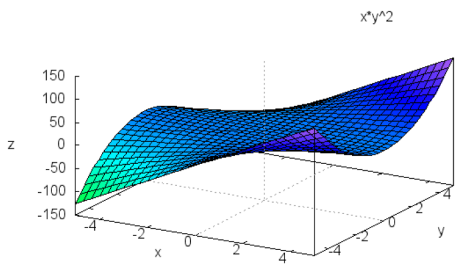
$$\{(x,y,f(x,y))\ ,\ (x,y) \in D\}$$

Remarque 7. Il n'est généralement pas aisé de tracer à la main l'allure d'une surface représentative, on utilisera alors un logiciel de géométrie ou bien la fonction *plot3d* de Python

Exemple 6.

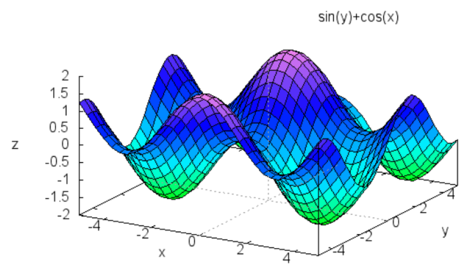
- Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy^2 \end{array}$

  Sa surface représentative est



- Soit $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sin(y) + cos(x) \end{array}$

  Sa surface représentative est



3 Dérivées partielles

Définition 6

Soit D un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.
Soit $(x_0, y_0) \in D$ et f_1, f_2 les fonctions partielles en (x_0, y_0).
Si f_1 est dérivable en x_0 alors on dit que <u>f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en (x_0, y_0)</u> et on note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0, y_0) \qquad \text{(dérivée par rapport à la première variable)}$$

De manière similaire si f_2 est dérivable en y_0 on dit alors que <u>f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en (x_0, y_0)</u> et on note

$$\frac{\partial f}{\partial y}f(x_0, y_0) = f_2'(y_0) \qquad \text{(dérivée par rapport à la seconde variable)}$$

Remarque 8. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ en considérant que la seconde variable (souvent y) est une constante.

Remarque 9. Le symbole ∂ se lit « d rond »

Définition 7

Soit D un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si f admet des dérivées partielles en tout point de D, on définit alors les fonctions dérivées partielles

$$\begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial x} : & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial y} : & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

Si ces deux fonctions sont continues alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et on note $\mathcal{C}^1(D)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Exemple 7.

- $\begin{array}{rccc} a : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$ a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial a}{\partial x}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial a}{\partial y}(x,y) = 1$$

- $\begin{array}{rccc} b : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 3xy + 2x^3y^2 - xy^4 \end{array}$ a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial b}{\partial x}(x,y) = 3y + 6x^2y^2 - y^4 \qquad \frac{\partial b}{\partial y}(x,y) = 3x + 4x^3y - 4xy^3$$

- $\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & y+3 \end{array}$ a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial d}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial d}{\partial y}(x,y) = 1$$

G Changement de variables

Théorème 6

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I et u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que $u(J) \subset I$.
On a alors

$$\int (u' \times f \circ u) = \left(\int f\right) \circ u$$

Remarque 10. Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, le changement de variables sera donné par l'énoncé.

Démonstration 5. Soit $F = \int f$. On a alors $u' \times f \circ u = u' \times F' \circ u = (F \circ u)'$.
Donc :

$$\int \left(u' \times f \circ u\right) = \int (F \circ u)' = F \circ u = \left(\int f\right) \circ u$$

Il y a essentiellement deux manières de rédiger un changement de variables. La première est plus longue et plus rigoureuse mais avec de l'habitude on lui préfèrera la seconde rédaction, moins rigoureuse mais plus rapide et plus proche des méthodes utilisées en Physique.

Exemple 8.

- Pour déterminer $\int x \ln(x^2)\ \mathrm{d}x$

  Soit $u(x) = x^2$. On notera simplement $u = x^2$ On a alors : $du = 2xdx$. Donc :

$$\int x \ln(x^2)\ \mathrm{d}x = \int \ln(u) \frac{\mathrm{d}u}{2} = u \ln u - u = x^2 \ln x^2 - x^2$$

- Pour déterminer $\int \sin(x)^3\ \mathrm{d}x$

  Soit $u = \cos(x)$. Alors $\mathrm{d}u = -\sin x\ \mathrm{d}x$

$$\int \sin(x)^3\ \mathrm{d}x = \int \sin x \times \sin(x)^2\ \mathrm{d}x = \int \sin x (1 - \cos^2 x)\ \mathrm{d}x = -\int (1-u^2)\ \mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} - u = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$$

III Méthodes.

A Dérivées partielles.

Méthode 1 (Calculs de dérivées partielles.)

$$c : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(x)y + e^{xy} \end{array}$$ a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x} + ye^{xy} \qquad \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) = \ln(x) + xe^{xy}$$

Remarque 11. Ces techniques de dérivation seront surtout utiles au second semestre lors des études extréma pour les fonctions à deux variables

B Calculs de primitives.

Méthode 2 (Reconnaitre la formule d'opérations sur les primitives à utiliser)

Pour primitiver les fonctions suivantes :

a) $a(x) = \cos(3x)$

b) $b(x) = 3\cos(3x) - 7\sin(5x)$

c) $c(x) = \sin x \cos x$

d) $d(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$

e) $d(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+5)^3}$

f) $e(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x+5}$

g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Pour chacune de ces expressions, il faut trouver la correspondance entre l'expression et la formule possible.

a) $\displaystyle\int u' \cos u = \sin u$

b) $\displaystyle\int u + v = \int u + \int v$ puis $\displaystyle\int u' \cos u = -\sin u$ et $\displaystyle\int u' \sin u = -\cos u$

c) La seule expression faisant intervenir un produit est $\displaystyle\int (v' \times u' \circ v) = u \circ v$

d) Deux expressions formules qui permettent de primitiver un quotient sont $\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$ et $\displaystyle\int \frac{u'}{u^n}$. Ici comme u est à la puissance 1. On choisit la première.

e) Deux expressions formules qui permettent de primitiver un quotient sont $\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$ et $\displaystyle\int \frac{u'}{u^n}$. Ici comme u est à la puissance 3. On choisit la seconde.

f) Ici la seule expression avec exp est $\displaystyle\int u'\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u$.

g) Là c'est moins facile, mais $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$ et l'on reconnait $\displaystyle\int u'u = \frac{u^2}{2}$.

Méthode 3 ($\displaystyle\int P(x)\mathrm{e}^x$)

Intégration par partie avec $v = P(x)$ et $u' = \mathrm{e}^x$. On fait autant d'intégration par partie que de degré du polynôme.

$$\int x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$$

Méthode 4 ($\displaystyle\int P(x)\sin x$)

Comme précédemment : Intégration par partie avec $v = P(x)$ et $u' = \sin x$. On fait autant d'intégration par partie que de degré du polynôme.

Remarque 12. On fera de même pour cos.

$$\begin{aligned}\int (x^2+3x+1)\sin x \,\mathrm{d}x &= -(x^2+3x+1)\cos x + \int (2x+3)\cos x \,\mathrm{d}x\\ &= -(x^2+3x+1)\cos x + (2x+3)\sin x - \int 2\sin x \,\mathrm{d}x\\ &= -(x^2+3x+1)\cos x + (2x+3)\sin x + 2\cos x\end{aligned}$$

Méthode 5 ($P(x)\ln x$)

Par intégration par partie en posant $u' = P(x)$ cette fois et $v = \ln x$:

$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$$

Remarque 13. Le cas où $P(x) = 1$ est cité dans le programme comme étant à connaitre

Méthode 6 (Par changement de variable.)

Voir exemple précédent ou ci-dessous.
Pour le calcul de : $\int x^2\sqrt{1-x} \, \mathrm{d}x$
On propose le changement de variable $u = 1 - x$ (donc $x = 1 - u$).
On a $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}x$.

$$\int x^2\sqrt{1-x} \, \mathrm{d}x = \int (1-u)^2\sqrt{u}(-\,\mathrm{d}u) = \int (-u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}u = \frac{-2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$$