Chapitre 12 : Produit scalaire et équations de droites.

I Attendus

- Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur.
- Déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal à partir d'une équation cartésienne où d'une équation réduite.
- Déterminer une équation de droite à partir de deux points.
- Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal (ou 2)*(3 page 245)*
- Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite.

II Colinéarité et droite

A Rappel sur la colinéarité.

Définition-Proposition 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont même direction.

Si le plan est muni d'un repère et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On a alors : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$

B Équation de droite.

Théorème 2

Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par A un point du plan et de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit M un point du plan, alors :

$$M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et} \vec{u} \text{ colinéaires}$$

Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ et $\mathscr{D}$ une droite.
$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\mathscr{D} \Leftrightarrow \mathscr{D}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, où $c \in \mathbb{R}$.

Vidéo 1

Déterminer une équation de droite à partir d'un vecteur directeur : 1 et 2. Tracer une droite dans un repère.

III Produit scalaire et droite

A Rappel produit scalaire.

Définition-Proposition 3

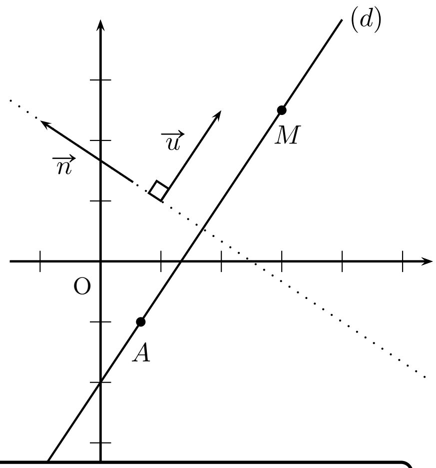
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le **nombre réel** défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\theta.$$

Si le plan est muni d'un repère **orthonormé** et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On a alors : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nul : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

B Équation de droite.



Définition 1

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
Un **vecteur normal** à la droite (d) est un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

Théorème 4

Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par A un point du plan et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Soit M un point du plan, alors :

$$M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ et $\mathscr{D}$ une droite.
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vecteur normal de $\mathscr{D} \Leftrightarrow \mathscr{D}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, où $c \in \mathbb{R}$.

Vidéo 2

Déterminer une équation de droite à partir d'un vecteur normal et d'un vecteur directeur

Proposition 5

Soient deux droites (d) et (d') dans le plan, de vecteurs directeur directeurs respectivement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ et de vecteurs normales respectivement $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$

- Alors (d) et (d') sont perpendiculaires si l'une des propriétés équivalentes ci-dessous est vérifiée :
  - $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux.
  - $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont orthogonaux.
  - $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont colinéaires.
- Alors (d) et (d') sont perpendiculaires si l'une des propriétés équivalentes ci-dessous est vérifiée :
  - $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires.
  - $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont colinéaires.
  - $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont orthogonaux.

Exemple 1.
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A(3;-1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-1;5)$.
2. La droite (d) est-elle perpendiculaire à la droite (d') d'équation $10x + 2y - 7 = 0$?

Exercice 1 à 16 page 258, 43 à 48 page 262, 55 à 59 page 263, 64 page 263, 92 page 268

C Projeté orthogonal

Définition 2

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, A un point de la droite $\mathscr{D}$ et B un point du plan. Le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{D}$ est le point H vérifiant :

- $\overrightarrow{AH}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{BH}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$

Vidéo 3

Déterminer des coordonnées d'un projeté orthogonal