Chapitre 11 : Résumé. Géométrie du plan et de l'espace.

Notation : *On travaillera dans ce chapitre tantôt dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, tantôt dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Pour ne pas surcharger on utilisera $\mathcal{A}$ lorsque le résultat désigne indifféremment le plan ou l'espace.*

I Points, vecteurs, produit scalaire et déterminant

A Colinéarité

Définition-Proposition 1

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$. On définit le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan $\mathcal{P}$. On a

- $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})$
- $\det(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \lambda\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) + \mu\det(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$
- $\det(\overrightarrow{u},\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + \mu\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})$

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0$.

B Produit scalaire

Définition 1 (Produit scalaire canonique)

Pour $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$. On définit le produit scalaire par : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

Pour $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$ on définit : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$

Proposition 2 (Propriétés)

Le produit scalaire vérifie

- $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathcal{A}}^3, \quad \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases}(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}) + \mu(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w})\\ \overrightarrow{u}\cdot(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w})\end{cases}$ bilinéarité
- En particulier on a : $\forall\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}, \quad \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{u} = 0$
- $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{A}}^2, \quad \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$ symétrie
- $\forall\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}, \quad \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ "définition"
- $\forall\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}, \quad \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} \geqslant 0$ positivité

Définition-Proposition 3 (Norme euclidienne)

Soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{A}}^2$. On définit la norme (euclidienne) de $\overrightarrow{u}$, notée $\|\overrightarrow{u}\|$, par : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}}$. Et alors :

- $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|$,
- $\|\overrightarrow{u}\| \geqslant 0$
- $\|\overrightarrow{u}\| = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$,
- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.
- On a les identités de polarisation : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$

Théorème 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{A}}^2$. On a alors
$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Théorème 5 (Inégalité triangulaire)

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{A}}^2$. On a alors : $\quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Définition-Proposition 6 (Orthogonalité et Pythagore)

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{A}}^2$. Alors : $\quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Proposition 7

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{A}}^2$. On a alors : $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$

II Droites et cercles dans le plan

A Droites

Définition-Proposition 8 (Équation paramétrique)

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $A \in \mathcal{D}$. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$.
$$M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = x_A + tx_{\vec{u}} \\ y = y_A + ty_{\vec{u}} \end{cases}$$
Ainsi
$$\mathcal{D} = \left\{(x_A + tx_{\vec{u}}, y_A + ty_{\vec{u}})\ ,\ t \in \mathbb{R}\right\}$$
On appelle une telle écriture une <u>représentation paramétrique de $\mathcal{D}$</u>

Définition-Proposition 9 (Équation cartésienne)

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, $A \in \mathcal{D}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors :
$$M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow ax + by = ax_A + by_A$$
Notons $c = ax_A + by_A$. On a alors
$$M(x, y) \in \mathcal{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad ax + by = c$$
L'équation $ax + by = c$ est appelée une <u>équation cartésienne</u> de la droite $\mathcal{D}$.

Proposition 10 (Parallélisme)

3 CNS pour que deux droites soit parallèles

— leurs vecteurs directeurs sont colinéaires

— leurs vecteurs normaux sont colinéaires

— les vecteurs directeurs de l'une sont orthogonaux aux vecteurs normaux de l'autre

seulement si,

B Cercles

Définition-Proposition 11 (Cercle)

Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega) \in \mathcal{P}$ et $R > 0$.
Le cercle $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P}\ ,\ \|\overrightarrow{\Omega M}\| = R\}$ de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega) \in \mathcal{P}$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

On appelle l'équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

III Droites et plans de l'espace

A Droites de l'espace

Définition-Proposition 12 (Représentation paramétrique d'une droite)

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ et soit $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathcal{D}$. Alors on a

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{E}\ ,\ \exists t \in \mathbb{R}\ ,\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}\} = \{(x_A + \alpha t, y_A + \beta t, z_A + \gamma t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$

On appelle une telle écriture une **représentation paramétrique** de $\mathcal{D}$. Un autre forme :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$$

B Plans de l'espace

Proposition 13 (Représentation paramétrique d'un plan)

Soit $\mathcal{Q}$ un plan et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ une base de $\mathcal{Q}$(c'est-à-dire deux vecteurs non-colinéaires de $\mathcal{Q}$), soit $A \in \mathcal{Q}$.

Alors : $\mathcal{Q} = \{M \in \mathcal{E}\ ,\ \exists(s, t) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}\} = \left\{(x_A + sa + t\alpha, y_A + sb + t\beta, z_A + sc + t\gamma)\ ,\ (s, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$

On appelle une telle écriture une **représentation paramétrique** de $\mathcal{Q}$. Une autre écriture :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow \exists(s, t) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = x_A + sa + t\alpha \\ y = y_A + sb + t\beta \\ z = z_A + sc + t\gamma \end{cases}$$

Définition-Proposition 14 (Équation cartésienne d'un plan)

Soit $\mathcal{Q}$ un plan, $A \in \mathcal{Q}$ et $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{Q}$ (c'est-à-dire orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{Q}$).

On appelle **équation cartésienne** de $\mathcal{Q}$ une équation de la forme $ax + by + cz = ax_A + by_A + cz_A$.

On a alors $\mathcal{Q} = \{M \in \mathcal{E}\ ,\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0\} = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E}\ ,\ ax + by + cz = ax_A + by_A + cz_A\}$

Réciproquement une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ définit un plan dont $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

Deux plans seront parallèles s'il existe un vecteur normal aux deux plans.

Définition-Proposition 15 (Intersection de deux plans)

Soit $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ deux plans **non-parallèles** de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes respectives

$$ax+by+cz=d \qquad \text{et} \qquad \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$$

L'intersection de $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ est une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$.
On appelle équation cartésienne de $\mathcal{D}$ le système d'équation

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \end{cases}$$

On peut obtenir un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ en cherchant un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et à $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ vecteurs normaux respectivement de $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$.

IV Projection orthogonale, distance à une droite ou un plan

Définition-Proposition 16 (Projeté orthogonal)

Soit $M \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ une droite ou un plan (si $\mathcal{A}=\mathcal{E}$). Il existe un unique point $H \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{HM}$ soit orthogonal à tout vecteur directeur directeur de $\mathcal{F}$.
On appelle ce point le **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{F}$.

On définit la distance de M à $\mathcal{F}$, notée $d(M,\mathcal{F})$ par

$$d(M,\mathcal{F}) = \inf_{N\in\mathcal{F}} \|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{MH}\|$$

H est l'intersection de $\mathcal{F}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathcal{F}$ passant par M.

V Barycentres

Définition-Proposition 17 (Barycentre et construction)

Soit $(A_1, A_2, \cdots, A_n) \in \mathcal{A}^n$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \neq 0$ alors il existe un unique point $G \in \mathcal{A}$ tel que

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

On appelle G le **barycentre** des points $A_1, A_2, \cdots, A_n$ affectés des poids $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ou barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)$. On notera dans ce chapitre $G = Bar\left((A_1,\alpha_1), \cdots, (A_n,\alpha_n)\right)$

$$\text{On a alors :} \qquad \forall M \in \mathcal{A}, \quad \overrightarrow{GM} = \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\left(\alpha_1\overrightarrow{A_1M} + \alpha_2\overrightarrow{A_2M} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_nM}\right)$$

Donc si les coordonnées des points A_i sont (x_i, y_i, z_i) en prenant $M=O$, on obtient les coordonnées de G :

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}\right)$$

Théorème 18 (Associativité du barycentre)

Soit $G_1 = Bar\left((A_1,\alpha_1), \cdots, (A_n,\alpha_n)\right)$ et $G_2 = Bar\left((B_1,\beta_1), \cdots, (B_m,\beta_m)\right)$. Alors :

$$G = Bar\left((A_1,\alpha_1), \cdots, (A_n,\alpha_n), (B_1,\beta_1), \cdots, (B_m,\beta_m)\right) = Bar\left(\left(G_1, \sum_{i=1}^n \alpha_i\right), \left(G_2, \sum_{j=1}^m \beta_j\right)\right)$$

VI Méthodes dans le plan.

A Droites.

Méthode-exemple 1 (Équation cartésienne)

Déterminer l'équation cartésienne d'une droite d à partir d'un point $A(1;3)$ et d'un vecteur directeur $\vec{u}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{colinéaires } \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow -3(x-1) - 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow -3x - 2y + 9 = 0$$

Méthode-exemple 2 (Représentation paramétrique)

Déterminer l'équation paramétrique d'une droite d à partir d'un point $A(1;3)$ et d'un vecteur directeur $\vec{u}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Donc $d = \{(1+2t; 3-3t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$.

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{colinéaires } \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x-1 = 2t \\ y-3 = -3t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-3t \end{cases}$$

Méthode-exemple 3 (Équation cartésienne $\longleftrightarrow$ Représentation paramétrique)

Passer d'une écriture cartésienne d'une droite d à une écriture paramétrique :

$$-3x - 2y + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = \dfrac{-3}{2}x - \dfrac{9}{2} \end{cases} \qquad \text{(Équation réduite)}$$

Donc $d = \left\{\left(x; \dfrac{-3}{2}x - \dfrac{9}{2}\right),\ x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(2t; -3t - \dfrac{9}{2}\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}$
Et d'une écriture paramétrique à une écriture cartésienne :

$$\exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-3t \end{cases} \Rightarrow 3x + 2y = 9 \qquad \text{En faisant } 3L_1 + 2L_2$$

Méthode-exemple 4 (Équation cartésienne)

Déterminer l'équation cartésienne d'une droite Δ à partir d'un point $A(1;3)$ et d'un vecteur normal $\vec{n}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2(x-1) - 3(y-3) = 2x - 3y + 7 = 0$$

Méthode 5 (Position relative de deux droites)

Dans le plan. Pour déterminer si deux droites sont parallèles :

- Les vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Les vecteurs normaux sont colinéaires.

Pour déterminer si deux droites sont perpendiculaires (c'est-à-dire orthogonales et sécantes) :

- Les vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- Les vecteurs normaux sont orthogonaux.

B Cercles.

Méthode-exemple 6 (Équation cartésienne)

Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle $\mathcal{C}$ à partir de son centre $A(1;3)$ et de son rayon :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 6y + 7 = 0$$

Méthode-exemple 7 (Équation cartésienne)

Déterminer l'équation d'un cercle $\mathcal{C}'$ à partir d'un diamètre $[AB]$ avec $A(1;3)$ et $B(-1;-2)$:

$$M \in \mathcal{C}' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} = (x-1)(x+1) + (y-3)(y+2) = x^2 + y^2 - y - 7 = 0$$

Méthode-exemple 8 (Retrouver le centre et le rayon)

Déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation cartésienne :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 3y - \frac{12}{4} = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1^2 + \underbrace{y^2 - 2 \times \frac{3}{2} \times y + \frac{9}{4}}_{(x-\frac{3}{2})^2} - \frac{9}{4} - \frac{12}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow DM = \frac{5}{2} \qquad \text{avec } D : \left(1; \frac{3}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}'' \end{aligned}$$

Avec $\mathcal{C}''$ cercle de centre $D\left(1; \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{5}{2}$.

Remarque : L'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions d'une équation cartésienne du type $x^2 + ax + y^2 + bx + c = 0$ peut aussi être réduit à un point ou même être vide (si $4c - a^2 - b^2 > 0$)

C Projection orthogonal.

Méthode-exemple 9 (Projeté orthogonal sur une droite)

Pour déterminer le projeté orthogonal d'un point E sur une droite d.

Soit une droite d d'équation paramétrique $d = \{(1+2t; 3-3t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$ et le point $E(0;-2)$. Donc $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Soit $H(1+2t; 3-3t)$ le point de d projeté orthogonal de E sur d. Alors

$$\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+2t \\ 3-3t+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2(2t+1) - 3(5-3t) = 13t - 13 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Donc $H(3;0)$ est le projeté de E sur la droite d.

Donc la distance de d à E est :

$$d(d;E) = EH = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

VII Méthodes dans l'espace.

A Droites.

Méthode-exemple 10 (Représentation paramétrique d'une droite)

L'équation paramétrique d'une droite d passant par un point $A(1;3;-3)$ et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$d = \{(1+2t; 3-3t; -3+t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Méthode-exemple 11 (D'une représentation cartésienne à une équation paramétrique)

Pour passer d'une représentation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$ (vue comme intersection des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) à une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} \mathcal{P} : & 7x+4y-2z-25=0 \\ \mathcal{R} : & 2x-z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 2L_1-7L_2 \\ . \end{array} \begin{cases} 2y+3z+15=0 \\ x=\frac{1}{2}z+\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}z+\frac{5}{2} \\ y=\frac{-3}{2}z-\frac{15}{2} \end{cases}$$

Donc $\mathcal{D} = \left\{\left(t+\frac{5}{2}; -3t-\frac{15}{2}; 2t\right)\,,\ t \in \mathbb{R}\right\}$. Donc $\overrightarrow{u}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

B Plan.

Méthode-exemple 12 (Représentation paramétrique d'un plan)

Déterminer l'équation paramétrique d'un plan $\mathcal{P}$ à partir d'un point $A(1;3;-3)$ et de deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathcal{P} = \left\{(1+2t-2s; 3-3t+2s; -3+t-3s)\,,\ (t,s) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Méthode-exemple 13 (Équation cartésienne d'un plan)

Déterminer l'équation cartésienne d'un plan $\mathcal{Q}$ à partir d'un point $A(1;3;-3)$ de ce plan et d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$: $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ à ce plan.

$$M(x,y,z) \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 7(x-1)+4(y-3)-2(z+3) = 7x+4y-2z-25=0$$

Méthode-exemple 14 (De la représentation paramétrique à l'équation cartésienne)

Soit $\mathcal{P} = \left\{(1+2t-2s; 3-3t+2s; -3+t-3s)\,,\ (t,s) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Soit $(t,s) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x=1+2t-2s \\ y=3-3t+2s \\ z=-3+t-3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1-2L3 \\ L_2+3L_3 \\ . \end{array} \begin{cases} x-2z=7+4s \\ y+3z=-6-7s \\ z=-3+t-3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 7L_1+4L2 \\ . \\ . \end{array} \begin{cases} 7x+4y-2z=25 \\ y+3z=12-7s \\ z=-3+t-3s \end{cases}$$

On pourra choisir la représentation matricielle pour résoudre ce genre de système.
Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc $7x+4y-2z-25=0$

Méthode-exemple 15 (De l'équation cartésienne à la représentation paramétrique)

Pour déterminer une équation paramétrique à partir d'une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$:

$$7x + 4y - 2z - 25 = 0 \Leftrightarrow x = 25 - \frac{4}{7}y + \frac{2}{7}z$$

$\mathcal{P} = \left\{\left(25 - \frac{4}{7}y + \frac{2}{7}z; y; z\right),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(25 - 4t + 2s; 7t; 7s),\ (t,s) \in \mathbb{R}^2\right\}$. On peut remarquer que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-4\\7\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\0\\7\end{pmatrix}$ constituent une base de $\mathcal{P}$.

C Projeté orthogonal.

Méthode-exemple 16 (Projeté orthogonal sur un plan)

Le projeté orthogonal d'un point $E : (8; 7; -5)$ sur un plan $\mathcal{P} :\ 7x + 4y - 2z - 25 = 0$. On note H le projeté orthogonal de E.

A partir de l'équation cartésienne du plan, on en déduit un vecteur normal $\overrightarrow{n} : \begin{pmatrix}7\\4\\-2\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. Donc :

$$\exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{EH} : \begin{pmatrix}7t\\4t\\-2t\end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ H : \begin{pmatrix}7t+8\\4t+7\\-2t-5\end{pmatrix}$$

Or :

$$H \in \mathcal{P} \Rightarrow 7(7t+8) + 4(4t+7) - 2(-2t-5) - 25 = 0 \Rightarrow 69t + 69 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Donc le projeté orthogonal de E sur $\mathcal{P}$ est le point H de coordonnées $(1; 3; -3)$.

Méthode-exemple 17 (Projeté orthogonal sur une droite)

Le projeté orthogonal d'un point $F(4; 0; -4)$ sur une droite $d = \{(1+2t; 3-3t; -3+t),\ t \in \mathbb{R}\},$. On note H le projeté orthogonal de F sur d. Comme H appartient à la droite $\mathcal{D}$, on a :

$$\exists t \in \mathbb{R},\ H\,(1+2t; 3-3t; -3+t)$$

Ensuite, le vecteur $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d (trouvé en prenant les coefficients des "t" dans l'expression de l'équation paramétrique). Donc :

$$\overrightarrow{FH} \perp \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1+2t-4\\3-3t\\-3+t+4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = 2(2t-3) - 3(3-3t) + (t+1) = 0 \Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Donc le projeté orthogonal de F sur d est $H(3; 0; -2)$.