Chapitre 12 : Géométrie du plan et de l'espace.

Notation : *On travaillera dans ce chapitre tantôt dans un plan $\mathcal{P}$, tantôt dans l'espace $\mathcal{E}$. Pour ne pas surcharger on utilisera $\mathcal{A}$ lorsque le résultat désigne indifféremment le plan ou l'espace.*

- *On supposera le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans ces conditions un point $M \in \mathcal{P}$ est caractérisé de manière unique par ses coordonnées (x, y) appelées abscisse et ordonnée dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on le notera alors $M(x, y)$. On assimilera alors souvent $\mathcal{P}$ à $\mathbb{R}^2$.*
- *De même on supposera l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans ces conditions un point $M \in \mathcal{E}$ est caractérisé de manière unique par ses coordonnées (x, y, z) appelées abscisse, ordonnée et côte dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on le notera alors $M(x, y, z)$. On assimilera alors souvent $\mathcal{E}$ à $\mathbb{R}^3$.*

I Points, vecteurs, produit scalaire et déterminant

A Colinéarité

Définition-Proposition 1

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$. On définit le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\mathcal{P}$. On a

- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$
- $\det(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{v}, \vec{w})$
- $\det(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}) + \mu \det(\vec{u}, \vec{w})$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration. Il suffit de faire le calcul. □

B Produit scalaire

Proposition 2 (Propriétés)

Le produit scalaire est

- $\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{A}}^3, \quad \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w}) \\ \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{u} \cdot \vec{w}) \end{cases}$

  En particulier on a : $\forall\vec{u} \in \vec{\mathcal{A}}, \qquad \vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$
- $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{A}}^2, \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\forall\vec{u} \in \vec{\mathcal{A}}, \qquad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \qquad$ si et seulement si $\qquad \vec{u} = \vec{0}$
- $\forall\vec{u} \in \vec{\mathcal{A}}, \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$

Définition-Proposition 3 (Norme euclidienne)

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$. On définit la norme (euclidienne) de $\overrightarrow{u}$, notée $\|\overrightarrow{u}\|$, par

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$$

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ sera dit normé si $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.

Alors

- $\|\lambda \overrightarrow{u}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{u}\|$,
- $\|\overrightarrow{u}\| \geqslant 0$
- $\|\overrightarrow{u}\| = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$,
- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
- On a les identités suivantes, dites de polarisation

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$$

1 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{A}}^2$. On a alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$

Démonstration 1. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{A}}^2$. On définit l'application

$$\begin{array}{cccc} P & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \|\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}\|^2 \end{array}$$

On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P(t) = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2t\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + t^2 \|\overrightarrow{v}\|^2$$

P est donc une application polynomiale de degré 2.
De plus, d'après les propriétés de la norme on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P(t) \geqslant 0$$

On peut procéder de deux manières :

— Comme P est de signe constant il ne peut pas admettre deux racines réelles distinctes, son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire

$$\Delta = 4(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 - 4\|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \leqslant 0$$

D'où

$$(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 \leqslant \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2$$

Par croissance de la fonction racine carrée on a alors

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\|$$

D'où

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \leqslant |\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\|$$

— Pour $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ le résultat à prouver est $0 \leqslant 0$ et est donc évident. Supposons désormais $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ d'où $\|\overrightarrow{u}\| \neq 0$.
Comme P ne prend que des valeurs positives on a en particulier

$$P\left(-\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\right) \geqslant 0$$

C'est-à-dire

$$\frac{(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} - 2\frac{(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} + \|\overrightarrow{v}\|^2 \geqslant 0$$

D'où
$$\frac{(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \leqslant \|\overrightarrow{v}\|^2$$
Puis
$$(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2 \leqslant \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2$$
Par croissance de la fonction racine carrée on a alors
$$|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$
Finalement on a bien
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} \leqslant |\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

2 Inégalité triangulaire.

Théorème 5

Inégalité triangulaire Soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\overrightarrow{\mathcal{A}}^2$. On a alors
$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|$$

Rem 1. La somme de deux côtés d'un triangle est plus petite que le troisième côté.

Démonstration 2. On a
$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\ &\leqslant \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\\ &\leqslant (\|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|)^2\end{aligned}$$
Ainsi
$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 \leqslant (\|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|)^2$$
Par croissance de la fonction racine carrée on a alors
$$|\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|| \leqslant |\|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\||$$
C'est-à-dire
$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|$$

Définition 1

Soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\overrightarrow{\mathcal{A}}^2$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

Théorème 6

de Pythagore Soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\overrightarrow{\mathcal{A}}^2$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si
$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2$$

Démonstration 3. Cela découle aisément de la formule
$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$$

Dans le cas où $\mathcal{A}=\mathbb{R}^2$ muni de son repère usuel, ces notions et résultats peuvent s'interpréter en terme d'angle.

Proposition 7

On se place dans le cas particulier où $\mathcal{A}=\mathbb{R}^2$ muni de son repère usuel.
Soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\overrightarrow{\mathcal{A}}^2$. On a alors
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$$

Rem 2. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont alors orthogonaux si et seulement si $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)=0$, c'est-à-dire si et seulement si $\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\in\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

II Droites et cercles dans le plan

A Vecteur directeur, représentation paramétrique

Définition 2

Une partie $\mathcal{D}$ non-vide de $\mathcal{P}$ est appelée une droite s'il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$ tel que

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} \ , \ \exists t \in \mathbb{R} \ , \ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}\}$$

où A est un point quelconque fixé de $\mathcal{D}$.
On dit alors que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Rem 3. Une droite admet toujours une infinité de vecteurs directeurs : deux vecteurs sont directeurs de la même droite si et seulement si ils sont colinéaires.

Proposition 8

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$. Alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Définition 3

- Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites sécantes si $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \neq \varnothing$
- Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites perpendiculaires si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Proposition 9

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $A \in \mathcal{D}$. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$.
Alors $M(x, y) \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = x_A + tx_{\overrightarrow{u}} \\ y = y_A + ty_{\overrightarrow{u}} \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathcal{D} = \left\{(x_A + tx_{\overrightarrow{u}}, y_A + ty_{\overrightarrow{u}}) \ , \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

On appelle une telle écriture une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$
Normalement, une droite est caractérisée de manière unique par la donnée

- d'un point de la droite
- d'un vecteur directeur

Rem 4. Une droite admet une infinité de représentations paramétriques. En effet celle-ci dépend du point choisi et du vecteur directeur choisi et on a une infinité de choix pour ces deux éléments.

B Vecteur normal, équation de droite.

1 Définition.

Définition 4

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$.
On dit que $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire, si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
De manière équivalente $\overrightarrow{v}$ est normal à $\mathcal{D}$ si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{D}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Rem 5. Comme pour les vecteurs directeurs, une droite admet une infinité de vecteurs normaux

2 Équation cartésienne.

Proposition 10

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, $A \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$ de coordonnées (a, b).
Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors
$M(x, y) \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, $ax + by = ax_A + by_A$.
Notons $c = ax_A + by_A$. On a alors

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad ax + by = c$$

L'équation $ax + by = c$ est appelée une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.
Une droite $\mathcal{D}$ est ainsi caractérisée de manière unique par la donnée de

- Un point de $\mathcal{D}$,
- Un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Rem 6. Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes.

Démonstration 4. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, $A \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$ de coordonnées (a, b).
Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$.

— Supposons que $M \in \mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, c'est-à-dire

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

Ce qui est équivalent à

$$ax + by = ax_A + by_A$$

Réciproquement supposons que $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$. Comme $\overrightarrow{v}$ n'est pas le vecteur nul alors $(a, b) \neq (0, 0)$, pour fixer les idées supposons $a \neq 0$.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(x_{\overrightarrow{u}}, y_{\overrightarrow{u}})$, on a ainsi $ax_{\overrightarrow{u}} + by_{\overrightarrow{u}} = 0$, d'où $x_{\overrightarrow{u}} = -\frac{b}{a} y_{\overrightarrow{u}}$. Ceci implique en particulier que $y_{\overrightarrow{u}} \neq 0$.
On a ainsi $(x - x_A) = -\frac{b}{a}(y - y_A) = \frac{x_{\overrightarrow{u}}}{y_{\overrightarrow{u}}}(y - y_A)$. Notons $t = \frac{y - y_A}{y_{\overrightarrow{u}}}$, On a alors

$$x = x_A + t x_{\overrightarrow{u}}, \qquad y = y_A + t y_{\overrightarrow{u}}$$

C'est-à-dire $M \in \mathcal{D}$.

3 Équation réduite.

Définition-Proposition 11

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by = c$. Si $a \neq 0$ on peut mettre cette équation sous la forme

$$y = \rho x + d$$

On appelle alors ρ le coefficient directeur ou la pente de $\mathcal{D}$ et d l'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$.

Rem 7. Si $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$ dirige $\mathcal{D}$ et $\alpha \neq 0$ alors $\frac{\beta}{\alpha}$ est le coefficient directeur de $\mathcal{D}$.

4 Vecteur directeur et vecteur normal.

Proposition 12

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
L'ensemble $\Delta = \{M(x, y) \in \mathcal{P}\ ,\ ax + by = c\}$ est une droite de vecteur normal $a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$.
Pour caractériser entièrement Δ il faut également donner un point $A \in \Delta$.
De manière équivalente Δ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$: $-b\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}$: $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

5 Parallélisme.

Proposition 13

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$. Alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si, et seulement si, $\det(-b\overrightarrow{i}+a\overrightarrow{j}, -b'\overrightarrow{i}+a\overrightarrow{j})=0$, c'est-à-dire, si, et seulement si

$$ab'-a'b=0$$

Exemple 1. Soit $A(2,4)$ et $B(-1,5)$

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
   La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}$ est normal à la droite (AB).
   La droite (AB) admet donc une équation cartésienne de la forme $x+3y=c$. Il nous reste à déterminer c.
   On sait que $A\in(AB)$, ainsi $x_A+3y_A=c$, c'est-à-dire $c=14$.
   Finalement (AB) admet pour équation cartésienne l'équation $x+3y=14$.
2. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la médiatrice du segment $[AB]$
   La médiatrice M du segment $[AB]$ est perpendiculaire à (AB). Ainsi $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à M.
   M admet alors une équation cartésienne de la forme $-3x+y=c'$.
   Pour déterminer c' il nous faut un point de M. Le milieu $I\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$ de $[AB]$ appartient à M. Ainsi $c=-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=3$
   M admet donc pour équation cartésienne l'équation $-3x+y=3$.
   Un vecteur directeur de M est le vecteur $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}$. On en déduit une représentation paramétrique de M

$$M=\left\{\left(-\frac{1}{2}+t,\frac{9}{2}+3t\right)\ ,\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

C Cercles

1 Définition.

Définition 5

Soit $\Omega\in\mathcal{P}$ et $r>0$. On appelle cercle de centre Ω et de rayon r, l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ à une distance égale à R du point Ω. C'est-à-dire

$$\mathcal{C}=\{M\in\mathcal{P}\ ,\ \|\overrightarrow{\Omega M}\|=R\}$$

2 Équation de cercle.

Théorème 14

Soit $\Omega(x_\Omega,y_\Omega)\in\mathcal{P}$ et $R>0$.
Le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$$

On appelle l'équation $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$ l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Rem 8. C'est simplement exprimer que $\Omega M^2=R^2$

Démonstration 5. Soit $M(x,y)\in\mathcal{P}$. On a

$$\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2=\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M}=(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2$$

Ainsi, on a

$$\|\overrightarrow{\Omega M}\|=R\underset{\text{Car } R\geqslant 0 \text{ et } \|\overrightarrow{\Omega M}\|\geqslant 0}{\Leftrightarrow}\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2=R^2\Leftrightarrow(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$$

Rem 9. Une équation de cercle est donc de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.

En développant on aboutit à une équation de la forme $x^2 + 2x_\Omega x + y^2 + 2y_\Omega y = R^2 - x_\Omega^2 - y_\Omega^2$, c'est-à-dire de la forme $x^2 + ax + y^2 + by = \rho$ avec $(a, b, \rho) \in \mathbb{R}^3$.

Face à une équation de la forme $x^2 + ax + y^2 + bx = \rho$ on va utiliser la mise sous forme canonique pour revenir à une équation de cercle plus lisible.

Exemple 2.
— $E_1 : x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 \\ &= (x-2)^2 + (y+3)^2 - 9 \end{aligned}$$

Ainsi E_1 est équivalente à

$$E'_1 : \qquad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$$

On reconnait l'équation du cercle de centre $\Omega_1(2, -3)$ et de rayon 3.

— $E_2 : x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 0$
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \\ &= (x-1)^2 + (y+1)^2 \end{aligned}$$

Ainsi E_2 est équivalente à

$$E'_2 : \qquad (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$$

On reconnait l'équation du cercle de centre $\Omega_2(1, -1)$ et de rayon 0, c'est-à-dire du point $\Omega_2(1, -1)$.

— $E_3 : x^2 - 6x + y^2 - 2y + 12 = 0$
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 2y + 12 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + 2 \\ &= (x-3)^2 + (y-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

Ainsi E_3 est équivalente à

$$E'_3 : \qquad (x-3)^2 + (y-1)^2 = -2$$

E_3 est ainsi une équation incompatible.

3 Surface.

Proposition 15

Rappel (CM2-6ème) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon $R \geqslant 0$ et $\mathcal{D}$ le disque associé.
L'aire de $\mathcal{D}$ vaut πR^2 et le périmètre de $\mathcal{C}$ vaut $2\pi R$.

III Droites et plans de l'espace

A Droites de l'espace

Comme dans le plan une droite de l'espace est définie par

- Un point de la droite
- Un vecteur directeur

Définition 6

Une partie $\mathcal{D}$ non-vide de $\mathcal{E}$ est appelée une droite s'il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$ tel que

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{E} \ , \ \exists t \in \mathbb{R} \ , \ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}\}$$

où A est un point quelconque fixé de $\mathcal{D}$.
On dit alors que $\overrightarrow{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite $\mathcal{D}$.

Rem 10. De manière similaire au cas du plan on dira que deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Proposition 16 (Représentation paramétrique d'une droite)

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ et soit $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathcal{D}$.
Alors on a

$$\mathcal{D} = \{(x_A + \alpha t, y_A + \beta t, z_A + \gamma t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$

On appelle une telle écriture une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
Un autre écriture :

$$M(x,y,z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$$

B Plans de l'espace

1 Définition

Définition 7

Une partie $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{E}$ est un plan s'il existe deux vecteurs non-colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et un point $A \in \mathcal{Q}$ tels que

$$\mathcal{Q} = \{M \in \mathcal{E}\ ,\ \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}\}$$

On dit alors que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base du plan $\mathcal{Q}$

Rem 11. — Un plan admet une infinité de bases.

— Soit A, B et C trois points non-alignés de $\mathcal{E}$, il existe un unique plan contenant A, B et C, on le note (ABC). On peut l'écrire, par exemple

$$(ABC) = \{M \in \mathcal{E}\ ,\ \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}\}$$

— En particulier, si $\mathcal{Q}$ est un plan et A, B et C sont trois points non-alignés de $\mathcal{Q}$ alors $\mathcal{Q} = (ABC)$ et donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{Q}$.

2 Représentation paramétrique

Proposition 17 (Représentation paramétrique d'un plan)

Soit $\mathcal{Q}$ un plan et soit $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ une base de $\mathcal{Q}$, soit $A \in \mathcal{Q}$. Alors

$$\mathcal{Q} = \left\{(x_A + sa + t\alpha, y_A + sb + t\beta, z_A + sc + t\gamma)\ ,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On appelle une telle écriture une représentation paramétrique de $\mathcal{Q}$.
Une autre écriture :

$$M(x,y,z) \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = x_A + sa + t\alpha \\ y = y_A + sb + t\beta \\ z = z_A + sc + t\gamma \end{cases}$$

Rem 12. Pour chaque point M le couple (s,t) est unique.

Rem 13. Un plan est caractérisé de manière unique par la donnée de

— Un point du plan

— Une base (deux vecteurs non-colinéaires) du plan

ou encore par la donnée de

— Trois points du plan

3 Équations cartésiennes

Définition 8

Soit $\mathcal{Q}$ un plan de l'espace, un vecteur $\overrightarrow{n}$ est dit normal à $\mathcal{Q}$ si

$$\forall (A,B) \in \mathcal{Q}^2 \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Rem 14. Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathcal{Q}$ alors $\overrightarrow{n}$ est normal à $\mathcal{Q}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

Proposition 18

Soit $\mathcal{Q}$ un plan de $\mathcal{E}$, soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{Q}$ et $A \in \mathcal{Q}$. Soit $M \in \mathcal{E}$, alors

$$M \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Démonstration 6. Admis (la preuve nécessite des arguments du chapitre « Espaces Vectoriels »)

Proposition 19

Soit $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$ et soit $A \in \mathcal{E}$, l'ensemble $\{M \in \mathcal{E} \ , \ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{w} = 0\}$ est un plan.

Rem 15. Un plan est ainsi caractérisé de manière unique par la donnée de

- Un point du plan,
- Un vecteur normal au plan

Démonstration 7. Admis (la preuve nécessite des arguments du chapitre « Espaces Vectoriels »)

Proposition 20 (Équation cartésienne d'un plan)

Soit $\mathcal{Q}$ un plan, $A \in \mathcal{Q}$ et $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ un vecteur normal à $\mathcal{Q}$.
On appelle équation cartésienne de $\mathcal{Q}$ une équation de la forme $ax + by + cz = d$ où $d = ax_A + by_A + cz_A$. On a alors

$$\mathcal{Q} = \{M(x,y,z) \in \mathcal{E} \ , \ ax + by + cz = d\}$$

Réciproquement une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ définit un unique plan dont $\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal.

Démonstration 8. Il nous faut prouver que

$$\mathcal{Q} = \{M(x,y,z) \in \mathcal{E} \ , \ ax + by + cz = d\}$$

Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{Q} &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = ax_A + by_A + cz_A \end{aligned}$$

4 Position relative de deux plans

Définition 9

Deux plans sont dits parallèles s'il existe un vecteur $\overrightarrow{w}$ normal aux deux plans.

5 Intersection de deux plans

Proposition 21

Soit $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ deux plans **non-parallèles** de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes respectives

$$ax + by + cz = d \qquad \text{et} \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

L'intersection de $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ est une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$.
On appelle équation cartésienne de $\mathcal{D}$ le système d'équation

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \end{cases}$$

On peut obtenir un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ en cherchant un vecteur orthogonal à $a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ et à $\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$.

Rem 16. On rappelle les propriétés suivantes du cours de géométrie de Seconde :
Deux droites de $\mathcal{E}$ peuvent être

— sécantes

— parallèles, dans ces deux cas elles sont dites coplanaires

— non-coplanaires

— confondues

Une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{E}$ peuvent

— être parallèles

— vérifier $\mathcal{D} \subset \mathcal{Q}$

— être sécants

Deux plans peuvent être

— sécants

— parallèles

— confondus

IV Projection orthogonale, distance à une droite ou un plan

Théorème 22

Soit $M \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ une droite ou un plan.
Il existe un unique point $H \in \mathcal{F}$ tel que

$$\forall B \in \mathcal{F}, \qquad \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$$

On appelle ce point le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$.

Définition 10

Soit $M \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ une droite ou un plan. On définit la distance de M à $\mathcal{F}$, notée $d(M, \mathcal{F})$ par

$$d(M, \mathcal{F}) = \inf_{N \in \mathcal{F}} \|\overrightarrow{MN}\|$$

Il s'agit donc de la borne inférieure des distances entre M et un point de $\mathcal{F}$.

Théorème 23

Soit $M \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ une droite ou un plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$.
Le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{F}$ est l'unique point qui réalise la distance de M à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire

$$d(M,\mathcal{F}) = \|\overrightarrow{MH}\|$$

Rem 17. Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$ est ainsi le point de $\mathcal{F}$ le plus proche de M.

Démonstration 9. Commençons par remarquer que, comme $H \in \mathcal{F}$ alors

$$d(M,\mathcal{F}) = \inf_{N\in\mathcal{F}} \|\overrightarrow{MN}\| \leqslant \|\overrightarrow{MH}\|$$

Soit $N \in \mathcal{F}$. On a

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{MN}\|^2 &= \|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HN}\|^2 \\ &= \|MH\|^2 + 2\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{HN} + \|\overrightarrow{HN}\|^2 \\ &= \|MH\|^2 + \|\overrightarrow{HN}\|^2\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall N \in \mathcal{F}, \qquad \|\overrightarrow{MN}\| \geqslant \|\overrightarrow{MH}\|$$

D'où

$$d(M,\mathcal{F}) = \inf_{N\in\mathcal{F}} \|\overrightarrow{MN}\| \geqslant \|\overrightarrow{MH}\|$$

Finalement on a bien

$$d(M,\mathcal{F}) = \|\overrightarrow{MH}\|$$

On peut aussi remarquer que, si $N \neq H$ alors $\|\overrightarrow{MN}\| > \|\overrightarrow{MH}\|$, ainsi,

$$\forall N \in \mathcal{F}\backslash\{H\}, \qquad \|MN\| > d(M,\mathcal{F})$$

H est donc bien l'unique point réalisant la distance de M à $\mathcal{F}$.

Comment déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan ? C'est en fait assez simple :

Proposition 24

Soit $M \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ une droite ou un plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$.
H est l'intersection de $\mathcal{F}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathcal{F}$ passant par M.

Démonstration 10.

$$\forall B \in \mathcal{F}, \qquad \overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{HB} = 0$$

Ainsi $\overrightarrow{HM}$ est un vecteur normal à $\mathcal{F}$.

La droite (HM) est ainsi la perpendiculaire à $\mathcal{F}$ passant par M et on a bien $\{H\} = (HM) \cap \mathcal{F}$.

Exemple 3. Déterminer le projeté orthogonal de $M(1,1,1)$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$ et la distance de M à $\mathcal{P}$

Le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

La droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A admet donc $\overrightarrow{n}$ comme vecteur directeur et a ainsi pour représentation paramétrique

$$\mathcal{D} = \{M(1+t, 1-t, 1+2t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Déterminons l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned}M(1+t,1-t,1+2t) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow (1+t) - (1-t) + 2(1+2t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + 6t = 0 \\ . &\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Ainsi le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ est le point $H\left(1-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}, 1-\frac{2}{3}\right) = H\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$
La distance entre A et $\mathcal{P}$ vaut

$$\|AH\| = \sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

V Barycentres

La notion de barycentre est très importante en physique et en chimie, que ce soit pour l'étude des configurations spatiales de molécules, l'étude du mouvement d'un système de points massiques en interaction de type gravitationnelle, la recherche du point d'équilibre d'un solide soumis à plusieurs forces, etc.

A Définition

Définition-Proposition 25

Soit $(A_1, A_2, \cdots, A_n) \in \mathcal{A}^n$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $\alpha_1 + a\alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ alors il existe un unique point $G \in \mathcal{A}$ tel que

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

On appelle G le barycentre des points $A_1, A_2, \cdots, A_n$ affectés des poids $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ou barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)$.
On notera dans ce chapitre $G = Bar\left((A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)\right)$

Rem 18. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ alors on parle d'isobarycentre des points $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

B Construction d'un barycentre

Théorème 26

Soit $(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)$ n points pondérés. Le barycentre G des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)$ est l'unique point G tel que

$$\forall M \in \mathcal{A}, \quad \overrightarrow{GM} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\left(\alpha_1\overrightarrow{A_1M} + \alpha_2\overrightarrow{A_2M} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_nM}\right)$$

En particulier, si les coordonnées des points A_i sont (x_i, y_i, z_i) alors, en prenant $M = O$, on obtient les coordonnées de G. Donc G a pour coordonnées

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}\right)$$

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha_1\overrightarrow{A_1M} + \alpha_2\overrightarrow{A_2M} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_nM} &= \alpha_1\overrightarrow{A_1G} + \alpha_1\overrightarrow{GM} + \alpha_2\overrightarrow{A_2G} + \alpha_2 5\overrightarrow{GM} \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_nG} + \alpha_n\overrightarrow{GM} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)\overrightarrow{GM} + \alpha_1\overrightarrow{A_1G} + \alpha_2\overrightarrow{A_2G} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_nG} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)\overrightarrow{GM} - \left(\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{0} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)\overrightarrow{GM}
\end{aligned}$$

D'où, comme $\alpha_1 + a\alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$,

$$\forall M \in \mathcal{A}, \quad \overrightarrow{GM} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\left(\alpha_1\overrightarrow{A_1M} + \alpha_2\overrightarrow{A_2M} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_nM}\right)$$

□

Rem 19.
- Si G est le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)$, alors, pour tout réel non-nul λ, G est le barycentre des points pondérés $(A_1, \lambda\alpha_1), \cdots, (A_n, \lambda\alpha_n)$.
  En pratique, quitte à prendre $\lambda = \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$ on imposera que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$.
- L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$.

- L'isobarycentre de trois points non-alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.
- L'ensemble des barycentres de deux points A et B affectés de poids quelconques est la droite (AB)
- L'ensemble des barycentres de trois points non-alignés A, B et C affectés de poids quelconques est le plan (ABC).

C Associativité du barycentre

Théorème 27 (Associativité du barycentre)

Soit $G_1 = Bar\left((A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)\right)$ et $G_2 = Bar\left((B_1, \beta_1), \cdots, (B_m, \beta_m)\right)$
Alors

$$G = Bar\left((A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n), (B_1, \beta_1), \cdots, (B_m, \beta_m)\right) = Bar\left(\left(G_1, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right), \left(G_2, \sum_{j=1}^{m} \beta_j\right)\right)$$

Exemple 4. Soit ABC un triangle non-plat. On va montrer que les médianes de ABC sont concourantes.

Soit I le milieu de $[AB]$, I est donc le barycentre de $\left(A, \frac{1}{2}\right)$, $\left(B, \frac{1}{2}\right)$.

La médiane issue de C dans ABC est la droite (CI), c'est donc l'ensemble des points qui peuvent s'écrire comme barycentre de $(C, 1-\lambda)$, (I, λ) avec $\lambda \in \mathbb{R}$, par associativité du barycentre c'est aussi l'ensemble des points qui peuvent s'écrire comme barycentre de $(C, 1-\lambda)$, $\left(A, \frac{\lambda}{2}\right)$, $\left(B, \frac{\lambda}{2}\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

De manière similaire la médiane issue de A dans ABC est l'ensemble des points qui peuvent s'écrire comme barycentre de $(A, 1-\mu)$, $\left(B, \frac{\mu}{2}\right)$, $\left(C, \frac{\mu}{2}\right)$ et la médiane issue de B dans ABC est l'ensemble des points qui peuvent s'écrire comme barycentre de $(B, 1-\psi)$, $\left(B, \frac{\psi}{2}\right)$, $\left(C, \frac{\psi}{2}\right)$.

En prenant $\lambda = \mu = \psi = \frac{2}{3}$ on constate que le barycentre G de $\left(A, \frac{1}{3}\right)$, $\left(B, \frac{1}{3}\right)$, $\left(C, \frac{1}{3}\right)$ appartient aux trois médianes. Les trois médianes sont ainsi concourantes en G, l'isobarycentre de A, B et C.

VI Méthodes dans le plan.

A Droites.

Méthode-exemple 1

Déterminer l'équation cartésienne d'une droite d à partir d'un point $A(1;3)$ et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{colinéaires } \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow -3(x-1) - 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow -3x - 2y + 9 = 0$$

Méthode-exemple 2

Déterminer l'équation paramétrique d'une droite d à partir d'un point $A(1;3)$ et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Donc $d = \{(1+2t; 3-3t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{colinéaires } \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x-1 = 2t \\ y-3 = -3t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-3t \end{cases}$$

Méthode-exemple 3

Passer d'une écriture cartésienne d'une droite d à une écriture paramétrique :

$$-3x-2y+9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = xy = \dfrac{-3}{2}x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Donc $d=\left\{\left(x;\dfrac{-3}{2}x-\dfrac{3}{2}\right),\ x\in\mathbb{R}\right\}$

Et d'une écriture paramétrique à une écriture cartésienne :

$$\exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-3t \end{cases} \Rightarrow 3x+2y=9 \qquad \text{En faisant } 3L_1+2L_2$$

Méthode-exemple 4

Déterminer l'équation cartésienne d'une droite Δ à partir d'un point $A(1;3)$ et d'un vecteur normal $\vec{n}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$M\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ orthogonaux

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2(x-1)-3(y-3) = 2x-3y+7=0$$

Rem 20. Les deux droites d et Δ de ces deux exemples sont orthogonales en le point A.

Méthode 5

Dans le plan. Pour déterminer si deux droites sont parallèles :

- Les vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Les vecteurs normaux sont colinéaires.

Pour déterminer si deux droites sont perpendiculaires (c'est-à-dire orthogonales et sécantes) :

- Les vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- Les vecteurs normaux sont orthogonaux.

B Cercles.

Méthode-exemple 6

Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle $\mathcal{C}$ à partir de son centre $A(1;3)$ et de son rayon :

$$M\in\mathcal{C} \Leftrightarrow AM=3 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2 = x^2-2x+y^2-6y+10=0$$

Méthode-exemple 7

Déterminer l'équation d'un cercle $\mathcal{C}'$ à partir d'un diamètre $[AB]$ avec $A(1;3)$ et $B(-1;-2)$:

$$M\in\mathcal{C}' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} = (x-1)(x+1)+(y-3)(y+2) = x^2+y^2-y-7=0$$

Méthode-exemple 8

Déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation cartésienne :

$$x^2-2x+y^2-3y-=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}-1^2+\underbrace{y^2-2\times\frac{3}{2}\times y+\frac{9}{4}}_{(x-\frac{3}{2})^2}-\frac{9}{4}-\frac{12}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow DM=\frac{5}{2} \qquad \text{avec } D:\left(1;\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow M\in\mathcal{C}''$$

Avec $\mathcal{C}''$ cercle de centre $D\left(1;\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{5}{2}$.

C Projection orthogonal.

Méthode-exemple 9

Pour déterminer le projeté orthogonal d'un point E sur une droite d.
Soit une droite d d'équation paramétrique $d=\{(1+2t;3-3t)\,,\ t\in\mathbb{R}\}$ et le point $E(0;-2)$.
Donc $\overrightarrow{u}:\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
Soit $H(1+2t;3-3t)$ le point de d projeté orthogonal de E sur d. Alors

$$\overrightarrow{EH}\perp\overrightarrow{u}\Rightarrow\begin{pmatrix}1+2t\\3-3t+2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=2(2t+1)-3(5-3t)=13t-13=0\Rightarrow t=1$$

Donc $H(3;0)$ est le projeté de E sur la droite d.
Donc la distance de d à E est :

$$d(d;E)=EH=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

VII Méthodes dans l'espace.

A Droites.

Méthode-exemple 10

Déterminer l'équation paramétrique d'une droite d à partir d'un point $A(1;3;-3)$ et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}:\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$. Donc $d=\{(1+2t;3-3t;-3+t)\,,\ t\in\mathbb{R}\}$.

Méthode-exemple 11

Déterminer l'équation paramétrique d'un plan $\mathcal{P}$ à partir d'un point $A(1;3;-3)$ et de deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}:\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}:\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}$.
Donc $\mathcal{P}=\left\{(1+2t-2s;3-3t+2s;-3+t-3s)\,,\ (t,s)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Méthode-exemple 12

Déterminer l'équation cartésienne d'un plan $\mathcal{Q}$ à partir d'un point $A(1;3;-3)$ de ce plan et d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$: $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ à ce plan.

$$M(x,y,z) \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 7(x-1)+4(y-3)-2(z+3) = 7x+4y-2z-25 = 0$$

Méthode-exemple 13

Passer d'une équation paramétrique de plan à une équation cartésienne. Soit $\mathcal{P} = \left\{(1+2t-2s; 3-3t+2s; -3+t-3s)\,,\ (t,s) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Soit $(t,s) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = 1+2t-2s \\ y = 3-3t+2s \\ z = -3+t-3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 - 2L3 \\ L_2 + 3L_3 \\ . \end{matrix} \begin{cases} x - 2z = 7+4s \\ y + 3z = -6-7s \\ z = -3+t-3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 7L_1 + 4L2 \\ . \\ . \end{matrix} \begin{cases} 7x+4y-2z = 25 \\ y+3z = 12-7s \\ z = -3+t-3s \end{cases}$$

On pourra choisir la représentation matricielle pour résoudre ce genre de problème.
Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc $7x+4y-2z-25=0$

Méthode-exemple 14

Pour déterminer une équation paramétrique à partir d'une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$:

$$7x+4y-2z-25=0 \Leftrightarrow x = 25\frac{-4}{7}y + \frac{2}{7}z$$

$\mathcal{P} = \left\{\left(25\frac{-4}{7}y + \frac{2}{7}z; y; z\right)\,,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Soit $(t,s) \in \mathbb{R}^2$

Méthode-exemple 15

Pour passer d'une représentation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$ (vue comme intersection de deux plans) à une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} \mathcal{P}:\ 7x+4y-2z-25=0 \\ \mathcal{R}:\ 2x-z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2L_1 - 7L_2 \\ . \end{matrix} \begin{cases} 2y+3z+15=0 \\ x = \frac{1}{2}z + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z + \frac{5}{2} \\ y = \frac{-3}{2}z - \frac{15}{2} \end{cases}$$

Donc $\mathcal{D} = \left\{\left(t+\frac{5}{2}; -3t - \frac{15}{2}; 2t\right)\,,\ t \in \mathbb{R}\right\}$

B Projeté orthogonal.

Méthode-exemple 16

Projeté orthogonal sur un plan $\mathcal{P}$: $7x + 4y - 2z - 25 = 0$ d'un point $E : (8; 7; -5)$. On note H le projeté orthogonal de E.

A partir de l'équation cartésienne du plan, on en déduit un vecteur normal $\overrightarrow{n}$: $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. Donc :

$$\exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{EH} : \begin{pmatrix} 7t \\ 4t \\ -2t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ H : \begin{pmatrix} 7t+8 \\ 4t+7 \\ -2t-5 \end{pmatrix}$$

Or :

$$H \in \mathcal{P} \Rightarrow 7(7t+8) + 4(4t+7) - 2(-2t-5) - 25 = 0 \Rightarrow 69t + 69 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Donc le projeté orthogonal de E sur $\mathcal{P}$ est le point de coordonnées $(1; 3; -3)$.

Méthode-exemple 17

Projeté orthogonal sur une droite $d = \{(1+2t; 3-3t; -3+t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$, d'un point $F(4; 0; -4)$. On note H le projeté orthogonal de F sur d. Alors

$$\exists t \in \mathbb{R},\ H\,(1+2t; 3-3t; -3+t)$$

Ensuite, le vecteur $\overrightarrow{u}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d (trouvé en prenant les coefficients des "t" dans l'expression de l'équation paramétrique). Donc :

$$\overrightarrow{FH} \perp \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1+2t-4 \\ 3-3t \\ -3+t+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(2t-3) - 3(3-3t) + (t+1) = 0 \Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Donc le projeté orthogonal de F sur d est $H(3; 0; -2)$.

C Perpendiculaire commune à deux droites.

Méthode 18

Pour déterminer la perpendiculaire commune à deux droites non parallèles $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A; \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D}(B; \overrightarrow{v})$.

1. On détermine un vecteur normal $\overrightarrow{w}$ aux deux droites.
2. On détermine les deux plans $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ et $\mathcal{P}' = \mathcal{P}(b, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ contenant respectivement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
3. L'intersection $\mathcal{D}'' = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ est la droite cherchée.

Méthode-exemple 19

Autre méthode : Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A; \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D}(B; \overrightarrow{v})$ avec $A(1;1;1)$; $B(1;2;3)$; $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et enfin $\overrightarrow{v} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $H \in \mathcal{D}$ et $H' \in \mathcal{D}'$. Alors il existe t et s tels que :

$$H(t+1; t+1; 1) \qquad \text{et} \qquad H'(1; s+2; s+3)$$

La distance $HH'^2 = t^2 + (s-t+1)^2 + (s+2)^2 = f(t;s)$
Cette fonction doit être minimale en t et s. On dérive en fonction de t. On obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t;s) = 2t - 2(s-t+1) = 4t - 2s - 2$$

Cette dérivée s'annule pour $t = \dfrac{s+2}{2}$. On obtient :

$$g(s) = f\left(\frac{s+2}{2}; s\right) = \left(\frac{s+2}{2}\right)^2 + \left(s - \frac{s+2}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{s+2}{2} + 2\right)^2 = \frac{3s^2 + 24s + 56}{4}$$

Cette fonction est minimale pour $s = 4$ et donc $t = 3$ et l'on obtient les points $H(4;5;1)$ et $H'(1;6;7)$ et la distance $HH' = \sqrt{44}$