Chapitre 12 Primitives et équations différentielles

I Primitive d'une fonction continue

Définition 1

Soit I un **intervalle**. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est dite être $\boxed{\textit{une}}$ primitive de f sur I si :

- F est dérivable sur I
- Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$

Dire que F est une primitive de f sur I revient à dire que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I ou y désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1

Soit I un **intervalle**. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.
Si $F : I \to \mathbb{R}$ est **une** primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f est donné par :

$$\{F + K; K \in \mathbb{R}\}$$

Proposition 2 (Linéarité de la *primitivation*)

Soient f et g sont deux fonctions continues sur un même intervalle I. Si F et G sont deux primitives respectivement de f et g. Soient $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

Théorème 3 (Énoncé simplifié du **Théorème fondamental de l'analyse**)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Proposition 4

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = \lambda$.

A Primitives usuelles

Fonction	Intervalle	Une primitive
$\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \lambda x$
$n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$\alpha \in \mathbb{R}^* \backslash \{-1\}$, $x \mapsto x^\alpha$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
Si $a > 0$ et $a \neq 1$, $x \mapsto a^x$,	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{a^x}{\ln(a)}$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$

B Opérations sur les primitives.

La fonction u utilisé ci-dessous est une fonction continue de dérivée continue.

f	F (Une primitive)	Condition sur u
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	u ne s'annule pas sur I
Si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, $\frac{u'}{u^n}$,	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u strictement positive sur I
Si $\alpha \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$, $u'u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	• u ne s'annule pas sur I si $\alpha \in \mathbb{Z}$ • u strictement positive sur I sinon
$u'e^u$	e^u	
$u' \times (\cos \circ u)$	$\sin \circ u$	
$u' \times (\sin \circ u)$	$-\cos \circ u$	
$v' \times (u' \circ v)$	$u \circ v$	

Exercice 1 à 20 page 227

Vidéo 1

- Exemple 1
- Exemple 2
- Exemple 3
- Exemple 4
- Exemple 5

II Équations différentielles linéaires d'ordre 1

A Définition.

Définition 2

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation
$$y' + ay = b \qquad (\mathcal{E})$$
où l'inconnue est la fonction y est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
- On appelle l'équation
$$y' + ay = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$
l'équation différentielle **homogène** associée à $(\mathcal{E})$.
- Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y'(t) + ay(t) = b$$

Vidéo 2

Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

B Résolution de l'équation homogène.

Théorème 5 (Résolution de l'équation homogène.)

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle linéaire homogène $\mathcal{E}_0 :\ y' + ay = 0$, admet comme ensemble de solution :
$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto Ke^{-at}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

21 à 27 page 228

Vidéo 3

Exemple de résolution de l'équation homogène.

C Résolution de l'équation $y' = ay + b$.

Proposition 6 (Solution générale)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + ay = b \qquad (\mathcal{E})$$

— Si $a \neq 0$ alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto Ke^{-at} + \frac{b}{a}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

— Si $a = 0$ alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto K + bt\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$$

Vidéo 4

Résolution :

- Exemple 1
- Exemple 2

Ex 29 à 36 page 229

D Résolution de $y' = ay + f$.

Définition 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur I. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' = ay + f \qquad (\mathcal{E})$$

Une solution particulière de l'équation $mathcalE$ est une fonction y_p définie sur I vérifiant l'équation différentielle.

Théorème 7 (Résolution de l'équation générale.)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur I. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' = ay + f \qquad (\mathcal{E})$$

Si y_0 est une solution particulière de $\mathcal{E}$, alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto Ce^{at} + y_p\ ,\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

Vidéo 5

Solution d'une équation du type $y' = ay + b$

Ex 37 à 49 page 231

E Problème de Cauchy.

Définition-Proposition 8 (Problème de Cauchy.)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ Le problème

$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y' = ay + b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est appelé un **problème de Cauchy** pour les équations différentielles d'ordre 1. Il admet **une unique solution**.