Chapitre 12 : Produit scalaire dans l'espace.

I Attendus

- Déterminer un produit scalaire à partir des différentes formules. *(Ex 1-2 page 323 et 11 page 327)*
- Calculer une mesure d'angle. *(Ex 2 page 323)*
- Utiliser les règles de calcul du produit scalaire. *(Ex 7 page 325)*
- Utiliser la caractérisation de l'orthogonalité par le produit scalaire. *Ex 11 page 327)*
- Démontrer qu'un vecteur est normal à un plan. *(Ex 20 page 329)*
- Déterminer une équation cartésienne de plan :
  - A partir d'un point et d'un vecteur normal. *(Ex 21 page 329)*
  - A partir de trois points.
- Étudier la position relative d'une droite et d'un plan (parallèles ou sécants et cas d'orthogonalité)
- Étudier la position relative de deux plans (parallèles ou sécants et cas d'orthogonalité) *(Ex 22 page 329)*

II Produit scalaire dans l'espace

A Définition

Définition 1

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace, le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ramené *au* plan vectoriel contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On peut définir le produit scalaire comme dans le plan par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}||^2\right)$$

Conséquences Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace. Soit A, B et C trois points de l'espace vérifiant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Vidéo 1

Premier exemple de calcul.

Exercice 3 page 323

B Norme et produit scalaire.

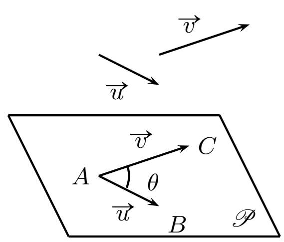
Proposition 1

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, alors : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$

C Configuration

Proposition 2

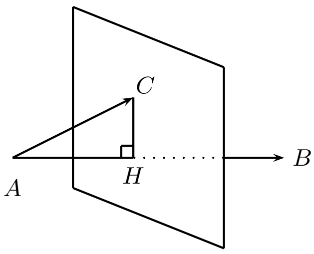
Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos\theta$ avec $\theta = \widehat{BAC}$.



Proposition 3

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de l'espace et si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$



Remarque : Si K est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC), on a aussi : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$

Exercice 4 à 6 page 323 puis 31 à 42 page 331

D Expression analytique

Proposition 4

Dans un repère orthonormé de l'espace, si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ sont deux vecteurs, alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exercice 9 page 325 et 44 page 331

E Règles de calcul

Proposition 5

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tout nombre réel k :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
2. $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
3. $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$

Proposition 6 (Conséquences)

Comme dans le plan, pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace :

4. $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
5. $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
6. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \dots\dots\dots$

Vidéo 2

Exemple d'utilisation des coordonnées pour effectuer des calculs de produit scalaire.

Exercice 8 et 10 page 325 puis 45 à 50 page 332.

III Orthogonalité dans l'espace

A Orthogonalité de deux droites

Définition 2

Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** signifie que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

Proposition 7

Deux droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonales si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux. C'est deux droites d et d' seront dites perpendiculaires si elles sont orthogonales et sécantes.

Exercices 12, 18 et 19 page 327 puis 51 à 56

B Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Proposition 8

Soit d est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{P}$ est le plan dirigé par un couple $(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w})$ (donc non colinéaires)

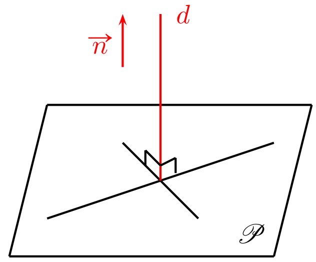
- La droite d et le plan $\mathscr{P}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, quels que soient les points M et N de $\mathscr{P}$, on a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{MN} = 0$.
- La droite d et le plan $\mathscr{P}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 0$.

IV Équations cartésiennes d'un plan

A Vecteur normal à un plan - Plans perpendiculaires

Définition 3

Dire qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul est **normal** à un plan $\mathscr{P}$ signifie que toute droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

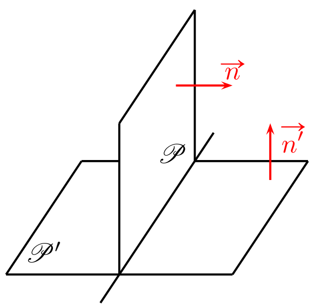


Proposition 9

Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ est le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Définition 4

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.
Dire que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont **perpendiculaires** signifie que $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0$.



Vidéo 3

Déterminer un vecteur normal à un plan : Exemple 1 et Exemple 2.

B Équations cartésiennes d'un plan

Proposition 10

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Soient a, b et c trois réels non tous nuls. Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.

Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si et seulement si $\mathscr{P}$ admet une équation de la forme $ax+by+cz+d = 0$, où d désigne un nombre réel.

Exemple 1. Dans un repère orthonormé, $\mathscr{P}$ est le plan passant par $A(1;-3;2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-1;1;4)$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

Exemple 2. Dans un repère orthonormé, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont les plans d'équations respectives :

$$2x+y+1=0 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}x+y+\frac{3}{2}z-4=0.$$

Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont-ils perpendiculaires ?

Vidéo 4

Déterminer une équation cartésienne de plan

Exercices 23 à 25 page 329 puis exercices 57 à 66 page 333 enfin 67 et 69 page 334

C Positions relatives d'une droite et d'un plan.

Proposition 11

Soient d une droite de l'espace de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Alors

- Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux et donc $d\ //\mathscr{P}$ et alors :
  - Soit $d \subset \mathscr{P}$
  - Soit $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$
- Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont non orthogonaux et donc d et $\mathscr{P}$ sont sécants. Dans ce cas, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires si et seulement si d et $\mathscr{P}$ sont perpendiculaires.

Vidéo 5

Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Exercices 70 à 73 page 324

D Positions relatives de deux plans.

Proposition 12

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace de vecteur normal respectivement $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$. Alors

- Soit $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires et donc $\mathscr{P}\ //\mathscr{P}'$ et alors :
  - Soit $\mathscr{P}' = \mathscr{P}$
  - Soit $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$
- Soit $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont non colinéaires et donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants et $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ est une droite. Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux alors les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.

Vidéo 6

Déterminer l'intersection de deux plans
Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

Exercices 68 puis 74 à 79 page 324