Chapitre 13 : Équation linéaire du 1^{ier} et 2^{sd} ordre.

I Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1

A Définition.

Définition 1

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation
$$y' + ay = b \qquad (\mathcal{E})$$
où l'inconnue est la fonction y est appelée une équation différentielle $\underbrace{\text{linéaire}}_{\substack{y' \text{ et } y \text{ n'interviennent} \\ \text{qu'à la puissance } 1}}$ $\underbrace{\text{d'ordre 1}}_{\substack{\text{seuls } y \text{ et } y' \\ \text{apparaissent}}}$ $\underbrace{\text{à coefficients constants.}}_{a \text{ et } b \text{ sont des constantes}}$
- On appelle l'équation
$$y' + ay = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$
l'équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E})$.
- Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y'(t) + ay(t) = b$$

Rem 1. Une équation différentielle est une équation qui dont l'inconnue est une fonction et non des réels ou ou des complexes.

Rem 2. On peut décider que l'équation n'existe que sur un un intervalle I de $\mathbb{R}$.

B Résolution de l'équation homogène.

Théorème 1

Soit $a \in \mathbb{R}$.
L'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1
$$y' + ay = 0 \qquad (0)$$
admet comme ensemble de solution
$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto Ke^{-at} \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

Rem 3. La fonction exponentielle est solution du cas où $a = -1$.

Démonstration 1.
Soit $K \in \mathbb{R}$ et $y : t \mapsto Ke^{-at}$. Montrons que y solution de $(\mathcal{E}_0)$:
f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = -Kae^{-at}$$
D'où
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) + af(t) = -Kae^{-at} + aKe^{-at} = 0$$
Ainsi f est bien solution de $(\mathcal{E}_0)$.

Rem 4. Montrer que les éléments de $\mathcal{E}_0$ sont solutions, est le "sens" simple : il suffit de vérifier.

Démonstration 2. Réciproquement soit y une solution de (E_0). On va montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = Ke^{-at}$$

Soit alors $z \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{at}y(t) \end{array}$

z est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables et on a, pour $t \in \mathbb{R}$

$$z'(t) = ae^{at}y(t) + e^{at}y'(t) = e^{at}(y'(t) + ay(t)) = 0$$

z est donc une fonction constante, il existe ainsi $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} z(t) = K$$

C'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = Ke^{-at}$$

Rem 5. Pour ce sens :
1. On suppose l'existence une tel f fonction solution de $(\mathcal{E}_0)$.
2. On introduit une fonction g définie à partir de f et dont la dérivée sera nulle
3. Elle sera donc constante (ce sera la constante k).
4. On en déduit la fonction f

C Solution particulière.

Proposition 2

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + ay = b \qquad (\mathcal{E})$$

— Si $a \neq 0$ alors $y_0 \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{b}{a} \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$.

— Si $a = 0$ alors $y_0 \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & bt \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$.

Rem 6. Les coefficients étant constant, trouver une solution particulière est simple : pour l'ordre 1 ont peut choisir des fonctions polynôme de degré 1.

Démonstration 3. Il suffit de remplacer dans l'équation $(\mathcal{E})$, pour vérifier que ces fonctions sont solutions.

D Principe de superposition.

Théorème 3 (Principe de superposition pour les équations de degré 1)

Soit $(a, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1$ et soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_2$.
Alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de $y' + ay = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Rem 7. Ce principe de superposition fonctionne que les coefficients a et b soient des constantes ou des fonctions et que l'ordre soient 1 où $n \geqslant 1$.

Démonstration 4. Soit $(a, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1$ et soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_2$.
Soit alors $f = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. On a $f' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$.
D'où

$$f' + af = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + a(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \left(y_1' + ay_1\right) + \lambda_2 \left(y_2' + ay_2\right) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

Ainsi $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est bien une solution de $y' + ay = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Rem 8. In suffit de vérifier

E Résolution de l'équation générale.

Théorème 4

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + ay = b \qquad (\mathcal{E})$$

- Si $a \neq 0$ alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ke^{-at} + \frac{b}{a} \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

- Si $a = 0$ alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathcal{S} = \{ t \mapsto K + bt \ , \ K \in \mathbb{R} \}$$

Rem 9. Il suffira simplement d'additionner une solution particulière aux solutions générales.

Démonstration 5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle

$$y' + ay = b \qquad (\mathcal{E})$$

et son équation homogène associée

$$y' + ay = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$. Soit y_0 une solution particulière de $(\mathcal{E}_0)$.
Nous allons montrer par *double inclusions* que :

$$\{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_0\} = \mathcal{S}$$

Rem 10. L'égalité de deux ensembles se montre très souvent par double inclusions.

Rem 11. On utilise dans les deux cas le principe de superposition.

- **Montrons d'abord $\subset$.**
  Soit y une solution de $(\mathcal{E})$. Alors, d'après le principe de superposition, $y + y_0$ est une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b + 0$, c'est-à-dire de $(\mathcal{E})$.
  Ainsi
  $$\{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_0\} \subset \mathcal{S}$$
- **Montrons maintenant $\supset$.**
  Soit maintenant f une solution de $(\mathcal{E})$ et $g = f - y_0$. D'après le principe de superposition, $g = f - y_0$ est une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b - b$, c'est-à-dire de $(\mathcal{E}_0)$.
  Ainsi, comme $f = y_0 + g$, f s'exprime bien comme la somme de la solution particulière y_0 et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$.
  D'où
  $$\mathcal{S} \subset \{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_0\}$$

Et donc

$$\mathcal{S} = \{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_0\}$$

F Problème de Cauchy.

Définition-Proposition 5

Problème de Cauchy Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ Le problème

$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est appelé un **problème de Cauchy** pour les équations différentielles d'ordre 1. Il admet **une unique solution**.

Rem 12. On parlera souvent de condition initiale pour $y(t_0) = y_0$. Pour la fonction exponentielle cette condition est $y(0) = 1$ (De plus $a = -1$ et $b = 0$).

Rem 13. La problème de Cauchy admettra toujours qu'une unique solution.

Démonstration 6. Si $a \neq 0$ alors les solutions de $(\mathcal{E})$ sont de la forme

$$y : t \longmapsto Ke^{-at} + \frac{b}{a}$$

Une telle fonction est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si

$$Ke^{-at_0} + \frac{b}{a} = y_0$$

C'est-à-dire si et seulement si

$$K = e^{at_0}\left(y_0 - \frac{b}{a}\right)$$

Ainsi la fonction

$$\begin{array}{cccc} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{a(t_0-t)} + \frac{b}{a} \end{array}$$

est l'unique solution de $(\mathcal{P})$.

Rem 14. On connait l'expression générale d'une solution sans condition initiale. On montre que la constante K est conditionnée par la condition initiale.

Démonstration 7. Si $a = 0$ alors les solutions de $(\mathcal{E})$ sont de la forme

$$y : t \longmapsto K + bt$$

Une telle fonction est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si

$$K + bt_0 = y_0$$

C'est-à-dire si et seulement si

$$K = y_0 - bt_0$$

Ainsi la fonction

$$\begin{array}{ccccc} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & b(t - t_0) + y_0 \end{array}$$

est l'unique solution de $(\mathcal{P})$.

Exemple 1. On va résoudre le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y' - 3y = 5 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $y' - 3y = 5$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ke^{3t} - \frac{5}{3} \ ,\ K \in \mathbb{R} \right\}$$

Soit $K \in \mathbb{R}$ et $\begin{array}{ccccc} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & Ke^{3t} - \frac{5}{3} \end{array}$

On va déterminer pour quelle valeur de K a-t-on $y(0) = 2$.

On a $y(0) = K - \frac{5}{3}$, il nous faut donc prendre $K = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$

Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ est

$$\begin{array}{ccccc} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \frac{11e^{3t}-5}{3} \end{array}$$

II Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On cherche résoudre l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$. On va procéder suivant le même schéma que pour les équations du premier ordre

A Définition.

Définition 2

- Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'équation
$$y'' + ay' + by = c \tag{$\mathcal{E}$}$$
où l'inconnue est la fonction y est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- On appelle l'équation
$$y'' + ay' + by = 0 \tag{$\mathcal{E}_0$}$$
l'équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E})$.
- Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction deux fois dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y''(t) + ay'(t) + by(t) = c$$

B Résolution de l'équation homogène

Théorème 6

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2
$$y'' + ay' + by = 0 \tag{$\mathcal{E}_0$}$$
Soit $P \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + ax + b \end{array}$

On appelle P le polynôme caractéristique de l'équation $(\mathcal{E})$.
3 cas sont alors possibles

- $\Delta > 0$. Le polynôme P admet deux racines réelles distinctes λ et μ. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$est alors :
$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} \; , \; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- $\Delta = 0$. Le polynôme P admet une racine double λ. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$est alors :
$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} \; , \; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- $\Delta < 0$. Le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$est alors :
$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) \; , \; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Rem 15. On remarque que pour une équation linéaire d'ordre 2, il faudra la combinaison linéaire de deux fonctions pour engendrer l'ensemble solution.

Rem 16. Le cas $\Delta < 0$ est très courant en physique (sans jeu de mot) notamment pour tous phénomènes ondulatoires.

1 Cas $\Delta > 0$

Démonstration. • Cas où le polynôme P admet deux racines réelles distinctes λ et μ

— Commençons par prouver que les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont bien des solutions de $(\mathcal{E}_0)$.
Soit donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} \end{array}$
f est deux fois dérivables en tant que somme de fonctions deux fois dérivables et on a, pour $t \in \mathbb{R}$
$$f'(t) = \lambda Ae^{\lambda t} + \mu Be^{\mu t}$$
$$f''(t) = \lambda^2 Ae^{\lambda t} + \mu^2 Be^{\mu t}$$

Alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f''(t) + af'(t) + bf(t) &= \lambda^2 Ae^{\lambda t} + \mu^2 Be^{\mu t} + a\left(\lambda Ae^{\lambda t} + \mu Be^{\mu t}\right) + b\left(Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}\right) \\
&= Ae^{\lambda t}\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) + Be^{\mu t}\left(\mu^2 + a\mu + b\right) \\
&= Ae^{\lambda t}P(\lambda) + Be^{\mu t}P(\mu) \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi f est bien une solution de $(\mathcal{E}_0)$. On en déduit que

$$\left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\} \subset \mathcal{S}_0$$

— Montrons maintenant que toute solution de $(\mathcal{E}_0)$peut s'écrire sous la forme $t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
λ et μ sont les deux racines du polynôme $X^2 + aX + b$ ainsi, d'après les relations coefficients-racines (vues dans le chapitre « Nombres Réels et complexes, Trigonométrie »)

$$a = -(\lambda + \mu) \qquad \text{et } b = \lambda\mu$$

Soit y une solution de $(\mathcal{E}_0)$et soit $z\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-\lambda t}y(t) \end{array}$

On sait que y est une solution de $(\mathcal{E}_0)$, ainsi y vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y''(t) - (\lambda + \mu)y'(t) + \lambda\mu y(t) = 0$$

z est deux fois dérivable en tant que produit de fonctions deux fois dérivables et on a, pour $t \in \mathbb{R}$

$$z'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}y(t) + e^{-\lambda t}y'(t) = e^{-\lambda t}\left(y'(t) - \lambda y(t)\right)$$
$$z''(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t}y(t) - 2\lambda e^{-\lambda t}y'(t) + e^{-\lambda t}y''(t) = e^{-\lambda t}\left(y''(t) - 2\lambda y'(t) + \lambda^2 y(t)\right)$$

Alors, pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
z''(t) + (\lambda - \mu)z'(t) &= e^{-\lambda t}\left(\left(y''(t) - 2\lambda y'(t) + \lambda^2 y(t)\right) + (\lambda - \mu)\left(y'(t) - \lambda y(t)\right)\right) \\
&= e^{-\lambda t}\left(y''(t) - 2\lambda y'(t) + \lambda^2 y(t) + \lambda y'(t) - \lambda^2 y(t) - \mu y'(t) + \lambda\mu y(t)\right) \\
&= e^{-\lambda t}\left(y''(t) - (\lambda + \mu)y'(t) + \lambda\mu y(t)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

z' est alors solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$f' + (\lambda - \mu)f = 0$$

On a déjà déterminé les solutions de ce type d'équation. Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad z'(t) = Ke^{-(\lambda - \mu)t}$$

On primitive cette relation, il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad z(t) = \frac{K}{\mu - \lambda}e^{(\mu - \lambda)t} + C$$

D'où

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \frac{K}{\mu - \lambda}e^{\mu t} + Ce^{\lambda t}$$

En notant $A = \frac{K}{\mu - \lambda}$ et $B = C$ on aboutit bien à la forme voulue.
On a donc montré que

$$\mathcal{S}_0 \subset \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Et donc

$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

□

2 Cas $\Delta = 0$

Démonstration. • Cas où le polynôme P admet une racine double λ.

On a alors $P = X^2 - 2\lambda X + \lambda^2$, c'est-à-dire

$$a = -2\lambda \qquad \text{et} \qquad b = \lambda^2$$

— Commençons par prouver que les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont bien des solutions de $(\mathcal{E}_0)$.

Soit donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} \end{array}$

f est deux fois dérivables en tant que somme de fonctions deux fois dérivables et on a, pour $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = \lambda Ae^{\lambda t} + \lambda tBe^{\lambda t} + Be^{\lambda t} = e^{\lambda t}(\lambda A + \lambda tB + B)$$
$$f''(t) = \lambda^2 Ae^{\lambda t} + \lambda^2 tBe^{\mu t} + 2\lambda Be^{\lambda t} = e^{\lambda t}\left(\lambda^2 A + 2\lambda B + \lambda^2 tB\right)$$

Alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(t) + af'(t) + bf(t) &= e^{\lambda t}\left(\left(\lambda^2 A + 2\lambda B + \lambda^2 tB\right) + a(\lambda A + \lambda tB + B) + b(A + Bt)\right) \\ &= e^{\lambda t}\left(A\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) + Bt\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) + B(2\lambda + a)\right) \\ &= e^{\lambda t}(AP(\lambda) + BtP(\lambda) + B(2\lambda + (-2\lambda))) \\ &= e^{\lambda t}(0 + 0 + 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est bien une solution de $(\mathcal{E}_0)$. On en déduit que

$$\left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\} \subset \mathcal{S}_0$$

— Montrons maintenant que toute solution de $(\mathcal{E}_0)$peut s'écrire sous la forme $t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Soit y une solution de $(\mathcal{E}_0)$et soit $z \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-\lambda t}y(t) \end{array}$

On sait que y est une solution de $(\mathcal{E}_0)$, ainsi y vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y''(t) - 2\lambda y'(t) + \lambda^2 y(t) = 0$$

z est deux fois dérivable en tant que produit de fonctions deux fois dérivables et on a, pour $t \in \mathbb{R}$

$$z'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}y(t) + e^{-\lambda t}y'(t) = e^{-\lambda t}\left(y'(t) - \lambda y(t)\right)$$
$$z''(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t}y(t) - 2\lambda e^{-\lambda t}y'(t) + e^{-\lambda t}y''(t) = e^{-\lambda t}\left(y''(t) - 2\lambda y'(t) + \lambda^2 y(t)\right) = 0$$

z'' est donc la fonction nulle. En primitivant deux fois z'' on montre alors qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad z(t) = A + Bt$$

C'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}$$

On a donc montré que

$$\mathcal{S}_0 \subset \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Et donc

$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

□

3 Cas $\Delta < 0$

Démonstration. • Cas où le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$
On a alors $P = X^2 - 2\alpha X + (\alpha^2 + \beta^2)$.

— Commençons par prouver que les fonctions de la forme $t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont bien des solutions de $(\mathcal{E}_0)$.
Soit donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) \end{array}$

f est deux fois dérivables en tant que somme de fonctions deux fois dérivables et on a, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \alpha e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) + \beta e^{\alpha t}\left(-A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t)\right) \\ &= \alpha f(t) + \beta e^{\alpha t}\left(-A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= \alpha^2 e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) + 2\alpha\beta e^{\alpha t}\left(-A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t)\right) - \beta^2 e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)f(t) + 2\alpha\beta e^{\alpha t}\left(-A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t)\right) \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)f(t) + 2\alpha\left(f'(t) - \alpha f(t)\right) \end{aligned}$$

Alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(t) + af'(t) + bf(t) &= f''(t) - 2\alpha f'(t) + (\alpha^2 + \beta^2)f(t) \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)f(t) + 2\alpha\left(f'(t) - \alpha f(t)\right) - 2\alpha f'(t) + (\alpha^2 + \beta^2)f(t) \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)f(t) + 2\alpha f'(t) - 2\alpha^2 f(t) - 2\alpha f'(t) + (\alpha^2 + \beta^2)f(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est bien une solution de $(\mathcal{E}_0)$. On en déduit que

$$\left\{t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\} \subset \mathcal{S}_0$$

— Cette partie de la preuve ne peut se faire sans introduire le concept de dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour ne pas compliquer outre mesure ce cours, on a pris le parti de ne pas aborder cette notion et donc d'admettre cette partie de la preuve.
On admet donc que

$$\mathcal{S}_0 \subset \left\{t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Ce qui entraine que

$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

□

Rem 17. Dans le cas où P admet deux racines complexes on a vu que

$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Or, on sait qu'une expression de la forme $A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$ peut se mettre sous la forme $R\cos(\beta t + \varphi)$ avec $(R, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. On peut alors montrer que

$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto Re^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi)\ ,\ (R, \varphi) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Une telle écriture a plus d'intérêt en physique qu'en mathématiques car elle permet une lecture aisée de l'amplitude et du décalage de phase de la solution. En mathématiques on préférera la forme $t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$ qui a l'avantage de faire apparaître clairement une base de l'espace des solutions (au sens des bases des espaces vectoriels, notion qui viendra plus tard dans l'année).

Exemple 2. 1. Résolvons l'équation différentielle homogène

$$y'' - y' - 12y = 0 \qquad (\mathcal{H}_1)$$

Soit $P_1 = X^2 - X - 12$. Déterminons les racines de P.
Le discriminant de P est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-12) = 49 = 7^2$. P admet donc deux racines réelles distinctes qui sont 4 et -3.
L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_1)$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_1} = \left\{t \mapsto Ae^{4t} + Be^{-3t}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

2. Résolvons l'équation différentielle homogène

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad (\mathcal{H}_2)$$

Soit $P = X^2 + 4X + 4$. Déterminons les racines de P.
Le discriminant de P est $\Delta = 4^2 - 4 \times 4 = 0$. P admet donc une racine double qui est -2.
L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_2} = \left\{t \mapsto Ae^{-2t} + Bte^{-2t}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

3. Résolvons l'équation différentielle homogène

$$y'' - 8y' + 17y = 0 \qquad (\mathcal{H}_3)$$

Soit $P = X^2 - 8X + 17$. Déterminons les racines de P.
Le discriminant de P est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 17 = 64 - 68 = -4$. P admet donc deux racines complexes conjuguées qui sont $4 + i$ et $4 - i$
L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_3)$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_3} = \left\{t \mapsto e^{4t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right)\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

C Résolution de l'équation générale

Maintenant que l'on a résolu $(\mathcal{H})$ il ne nous reste plus qu'à déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre. Là encore on va chercher parmi des fonctions simples : les fonctions polynomiales de degré 2.

Soit donc $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \alpha t^2 + \beta t + \gamma \end{array}$, on cherche à quelle condition sur (α, β, γ) f est-elle solution de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \qquad (\mathcal{E})$$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = 2\alpha t + \beta \qquad f''(t) = 2\alpha$$

Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$f''(t) + af'(t) + bf(t) = b\alpha t^2 + (b\beta + 2a\alpha)\, t + (2\alpha + a\beta + b\gamma)$$

f est donc solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si

$$\begin{cases} b\alpha & = 0 \\ b\beta + 2a\alpha & = 0 \\ 2\alpha + a\beta + b\gamma & = c \end{cases}$$

3 situations sont alors possibles

— Si $b \neq 0$ alors on prend $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = \frac{c}{b}$, soit $f : t \mapsto \frac{c}{b}$
— Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors on prend $\alpha = 0$, $\beta = \frac{c}{a}$ et $\gamma = 0$, soit $f : t \mapsto \frac{c}{a}t$
— Si $b = 0$ et $a = 0$ alors on prend $\alpha = \frac{c}{2}$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, soit $f : t \mapsto \frac{c}{2}t^2$

On en déduit la proposition suivante

Proposition 7

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \qquad (\mathcal{E})$$

3 situations sont alors possibles

— Si $b \neq 0$ alors $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{b} \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$
— Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{a}t \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$
— Si $b = 0$ et $a = 0$ alors $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{2}t^2 \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$

En combinant les solutions de $(\mathcal{H})$ et les solutions particulières de $(\mathcal{E})$ on obtient alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Théorème 8

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \qquad (\mathcal{E})$$

On définit f_0 par

— Si $b \neq 0$ alors $f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{b} \end{array}$

— Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{a}t \end{array}$

— Si $b = 0$ et $a = 0$ alors $f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{2}t^2 \end{array}$

On définit le polynôme $P = X^2 + aX + b$
Plusieurs cas sont possibles

- Le polynôme P admet deux racines réelles distinctes λ et μ. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est alors
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} + f_0 \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- Le polynôme P admet une racine double λ. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est alors
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} + f_0 \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- Le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est alors
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) + f_0 \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Démonstration 8. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \qquad (\mathcal{E})$$

et son équation homogène associée

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (\mathcal{H})$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$.
Soit y_0 une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
Soit y une solution de $(\mathcal{H})$ alors, d'après le principe de superposition, $y + y_0$ est une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c + 0$, c'est-à-dire de $(\mathcal{E})$.
Ainsi

$$\{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\} \subset \mathcal{S}$$

Soit maintenant f une solution de $(\mathcal{E})$ et $g = f - y_0$. D'après le principe de superposition, $g = f - y_0$ est une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c - c$, c'est-à-dire de $(\mathcal{H})$.
Ainsi, comme $f = y_0 + g$, f s'exprime bien comme la somme de la solution particulière y_0 et d'une solution de $(\mathcal{H})$.
D'où

$$\mathcal{S} \subset \{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

Et donc

$$\mathcal{S} = \{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

Rem 18. A priori il semble y avoir 9 cas possibles mais si on regarde de plus près il n'y en a que 5.

En effet, si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $P = X^2 + aX$ admet forcement deux racines réelles distinctes (0 et $-a$) et si $a = b = 0$ alors $P = X^2$ admet une racine double 0.

D Principe de superposition.

Théorème 9

Principe de superposition pour les équations de degré 2 Soit $(a, b, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_1$ et soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_2$.
Alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de $y'' + ay' + by = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$.

Démonstration. Soit $(a, b, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y''+ay'+by = c_1$ et soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_2$.

Soit alors $f = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. On a $f' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$ et $f'' = \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2''$.

D'où

$$\begin{aligned} f'' + af' + bf &= \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' + a\left(\lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'\right) + b\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right) \\ &= \lambda_1\left(y_1'' + ay_1' + by_1\right) + \lambda_2\left(y_2'' + ay_2' + by_2\right) \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est bien une solution de $y'' + ay' + by = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. □

Rem 19. Le principe de superposition est très utile en physique et en particulier en mécanique. Considérons une solide de masse M soumis à deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ que l'on suppose colinéaires à l'axe Ox. Le solide est alors en mouvement rectiligne et sa position au cours du temps $x(t)$ vérifie le principe fondamental de la dynamique

$$Mx''(t) = F_1 + F_2$$

Il est parfois compliqué de résoudre cette équation différentielle. Toutefois le principe de superposition nous dit qu'il suffit de résoudre les équations différentielles

$$Mx''(t) = F_1 \qquad \text{et } Mx''(t) = F_2$$

et d'additionner les solutions.

E Problème de Cauchy.

Définition-Proposition 10

Problème de Cauchy
De même, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ Le problème

$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

est appelé un problème de Cauchy pour les équations différentielles d'ordre 2. Il admet une unique solution.

Rem 20. Il est important que les deux conditions initiales portent sur le même instant t_0.

Démonstration. Admis □

Exemple 3. On va résoudre le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y'' - 8y' + 17y = 5 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

On a déjà vu que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y'' - 8y' + 17y = 0$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{t \mapsto e^{4t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right)\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On cherche une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 8y' + 17y = 5$. La fonction $t \mapsto \frac{5}{17}$ convient.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 8y' + 17y = 5$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \frac{5}{17} + e^{4t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right)\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{5}{17} + e^{4t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right) \end{array}$

On va déterminer les valeurs de A et B pour lesquelles $y(0) = 3$ et $y'(0) = -1$.

On a

$$\begin{cases} y(0) & = \frac{5}{17} + A \\ y'(0) & = 4A + B \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} A & = 3 - \frac{5}{17} \\ B & = -1 - 4A \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} A & = \frac{46}{17} \\ B & = -\frac{201}{17} \end{cases}$$

Finalement l'unique solution de notre problème de Cauchy est

$$y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{5 + e^{4t}(46\cos(t) - 201\sin(t))}{17} \end{array}$$

III Méthodes de résolution.

Méthode 1

On en déduit une méthode pour résoudre les équations différentielles linéaires

- On résout l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$
- On trouve une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
- On obtient la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$ en additionnant notre solution particulière à la forme générale des solutions de $(\mathcal{E}_0)$.
- Si l'on est dans le cas d'un problème de Cauchy (avec condition(s) initiales), On détermine la constante pour trouver l'unique solution.

Méthode 2

jdzak

IV Motivations

Les équations différentielles sont un outil fondamental en sciences dès que l'on cherche à modéliser des phénomènes évoluant dans le temps selon des lois données, que ce soit en physique, en chimie, en écologie voire en économie. On va donner plusieurs exemples de situations faisant intervenir des équations différentielles.

Exemple 4. 1. Cinétique d'une réaction chimique

Considérons un système réactionnel fermé, de volume V constant, constitué d'un certain nombre d'espèces physicochimiques $A, B, C, \ldots$; on note $[A](t)$ (resp. $[B](t)$, etc) la concentration en espèce A.

Une réaction d'ordre 1 est une réaction de la forme :

$$\alpha A \to \varphi F + \gamma G + \cdots$$

Dans ce cas la concentration de A varie au cours du temps et sa vitesse de variation est proportionnelle à la quantité d'espèce A encore présente : Plus il y a d'espèce A, i.e. plus $[A](t)$ est grand, plus $[A](t)$ décroit rapidement, i.e. $[A]'(t)$ est un grand nombre négatif.

Plus précisément la concentration $[A]$ de A vérifie l'équation différentielle :

$$[A]'(t) = -\alpha k[A](t)$$

où k est la constante de vitesse de la réaction, qui ne dépend que de la température.
Les réactions d'ordre 1 sont notamment des réactions comportant un seul réactif (qui subit une décomposition, une isomérisation ...), ou dans lesquelles un soluté réagit avec le solvant.

- Décomposition du peroxyde d'hydrogène : $2H_2O_{2(aq)} = 2H_2O_{(l)} + O_{2(g)}$
- Décomposition du pentoxyde d'azote gazeux : $2N_2O_{5(g)} = 4NO_{2(g)} + O_{2(g)}$
- Isomérisation du cyclopropane en propène : $(CH_2)_3 = CH_3 - CH = CH_2$
- Hydrolyse d'un chlorure organique : $R - CL_{(aq)} + H_2O_{(l)} = R - OH_{(aq)} + HCl_{(aq)}$

Une réaction du type

$$A + B \to F + G$$

est appelée réaction d'ordre 2. Si on part de concentration initiale $[A] = a$, $[B] = b$, $[C] = [D] = 0$ alors la concentration $x(t) = [C](t) = [D](t)$ vérifie la loi de Van't Hoff

$$x'(t) = K(a - x(t))(b - x(t))$$

2. Masse reliée à un ressort (Oscillateur harmonique linéaire)
On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on se donne un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0. On attache une extrémité de ce ressort à un repère fixe d'abscisse 0 et l'autre extrémité à une masse m qui repose sur le sol.
La masse est alors soumise à la tension du ressort, à la gravité et à la réaction du sol. On suppose que les frottements sont négligeables.
Quand la masse se trouve à une distance $x(t)$ du repère fixe vertical elle subit alors une force de rappel

$$|F = -k(x(t) - l_0)|u$$

Le principe fondamental de la dynamique nous dit alors que

$$mx''(t) = -k(x(t) - l_0)$$

3. Circuit RLC
On s'intéresse au montage suivant :
On rappelle que :

- L'intensité $i(t)$ du courant à travers le condensateur vérifie

$$\forall t \geqslant 0 \quad i(t) = Cu'_C(t)$$

où $u_C(t)$ est la tension aux bornes du condensateur.

- La tension $u(t)$ aux bornes de la bobine idéale vérifie

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_L(t) = Li'(t)$$

où $i(t)$ est l'intensité du courant traversant la bobine.

- La tension aux bornes de la résistance s'écrit

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_R(t) = Ri(t)$$

Le générateur applique au circuit une tension $e(t)$. Dans ces conditions, la tension aux bornes du condensateur, $u_C(t)$ vérifie alors l'équation différentielle

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) + RCu'_C(t) + LCu''(t) = e(t)$$

4. Modèles de populations
Depuis longtemps les scientifiques ont cherché à comprendre et prédire les évolutions dans la taille et la composition des populations humaines et animales.
Historiquement Malthus fut un des précurseur de ce que l'on appelle aujourd'hui l'écologie en modélisant l'évolution de la population humaine $x(t)$ par l'équation différentielle

$$x'(t) = ax(t)$$

où a est un taux mixte de natalité/mortalité.

Par la suite Verhulst a amélioré ce modèle en considérant que les ressources naturelles sont limités, ce qui l'a mené à l'équation différentielle

$$x'(t) = ax(t)(K - x(t))$$

Il y a bien d'autres modèles de population (et la recherche continue) sur lesquels on reviendra plus en détail plus tard dans l'année.

Dans ce chapitre on s'intéressera uniquement aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants.