Chapitre 13 : Équation linéaire du 1^{ier} et 2^{sd} ordre.

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition 1

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation
$$y' + ay = b \qquad (\mathcal{E})$$
où l'inconnue est la fonction y est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
- On appelle l'équation
$$y' + ay = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$
l'équation différentielle **homogène** associée à $(\mathcal{E})$.
- Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y'(t) + ay(t) = b$$

Théorème 1 (Résolution de l'équation homogène.)

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle linéaire homogène $\mathcal{E}_0 :\ y' + ay = 0$, admet comme ensemble de solution :
$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto Ke^{-at}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

Proposition 2 (Solution particulière.)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1
$$y' + ay = b \qquad (\mathcal{E})$$

— Si $a \neq 0$ alors $y_0 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{b}{a} \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$.

— Si $a = 0$ alors $y_0 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & bt \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$.

Théorème 3 (Principe de superposition pour les équations de degré 1)

Soit $(a, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1$ et soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_2$.
Alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de $y' + ay = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Théorème 4 (Résolution de l'équation générale.)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1
$$y' + ay = b \qquad (\mathcal{E})$$

- Si $a \neq 0$ alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est
$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto Ke^{-at} + \frac{b}{a}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
- Si $a = 0$ alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est
$$\mathcal{S} = \{t \mapsto K + bt\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$$

Définition-Proposition 5 (Problème de Cauchy.)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ Le problème

$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est appelé un **problème de Cauchy** pour les équations différentielles d'ordre 1. Il admet **une unique solution**.

II Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Définition 2 (Équations différentielles linéaires d'ordre 2)

- Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'équation
$$y'' + ay' + by = c \qquad (\mathcal{E})$$
où l'inconnue est la fonction y est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- On appelle l'équation
$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$
l'équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E})$.
- Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction deux fois dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y''(t) + ay'(t) + by(t) = c$$

Théorème 6 (Résolution de l'équation homogène)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

Soit $P \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + ax + b \end{array}$

On appelle P le polynôme caractéristique de l'équation $(\mathcal{E})$.
3 cas sont alors possibles

- $\Delta > 0$. Le polynôme P admet deux racines réelles distinctes λ et μ. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$est alors :
$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} \;,\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- $\Delta = 0$. Le polynôme P admet une racine double λ. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$est alors :
$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} \;,\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- $\Delta < 0$. Le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$est alors :
$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) \;,\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Proposition 7 (Solution particulière)

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \tag{$\mathcal{E}$}$$

3 situations sont alors possibles

— Si $b \neq 0$ alors $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{b} \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$

— Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{a}t \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$

— Si $b = 0$ et $a = 0$ alors $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{2}t^2 \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$

Théorème 8 (Résolution de l'équation générale)

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \tag{$\mathcal{E}$}$$

On définit f_0 par

— Si $b \neq 0$ alors $f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{b} \end{array}$

— Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{a}t \end{array}$

— Si $b = 0$ et $a = 0$ alors $f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{c}{2}t^2 \end{array}$

On définit le polynôme $P = X^2 + aX + b$
Plusieurs cas sont possibles

- Le polynôme P admet deux racines réelles distinctes λ et μ. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est alors

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} + f_0\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Le polynôme P admet une racine double λ. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est alors

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} + f_0\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est alors

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) + f_0\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Théorème 9 (Principe de superposition pour les équations de degré 2)

Soit $(a,b,c_1,c_2) \in \mathbb{R}^3$ et soit $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_1$ et soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_2$.
Alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de $y'' + ay' + by = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$.

A Problème de Cauchy.

Définition-Proposition 10 (Problème de Cauchy)

De même, pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ Le problème

$$(\mathcal{P}) : \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

est appelé un problème de Cauchy pour les équations différentielles d'ordre 2. Il admet une unique solution.

III Méthodes de résolution.

Méthode 1

On en déduit une méthode pour résoudre les équations différentielles linéaires

- On résout l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$
- On trouve <u>une</u> solution particulière de $(\mathcal{E})$.
- On obtient la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$ en additionnant notre solution particulière à la forme générale des solutions de $(\mathcal{E}_0)$.
- Si l'on est dans le cas d'un problème de Cauchy (avec condition(s) initiales), On détermine la constante pour trouver l'unique solution.