Chapitre 9 : Intégration.

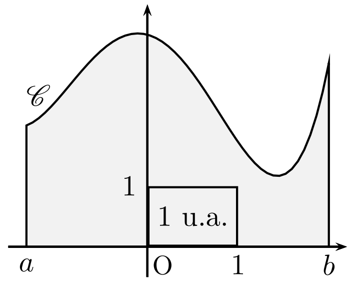
I Intégrale et aire

A Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
L'intégrale de a **à** b **de la fonction** f est l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$) .
On la note :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$



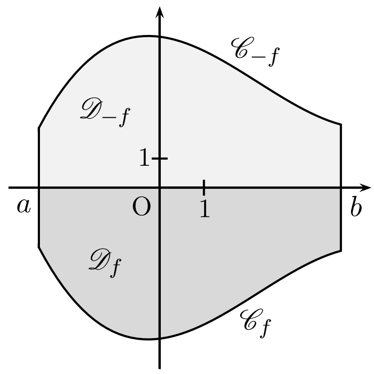
Proposition 1

Pour toute fonction f **continue et positive** sur $[a;b]$: $\displaystyle\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$

Exercices 1 à 11 page 258 puis 34 à 43 page 260-261

B Cas d'une fonction f continue et négative sur $[a;b]$

$$\text{aire}(\mathscr{D}_f) = \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

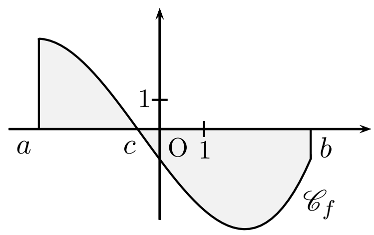


Vocabulaire : On dira que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ est **l'aire algébrique** du domaine $\mathscr{D}_f$.
Elle est positive si f est positive sur $[a;b]$ et négative si f est négative sur $[a;b]$.

C Cas d'une fonction f continue et de signe quelconque sur $[a;b]$

L'aire de $\mathscr{D}_f$ est la somme des aires algébriques des domaines définis par des intervalles sur lesquels f garde un signe constant. Dans l'exemple ci-contre :

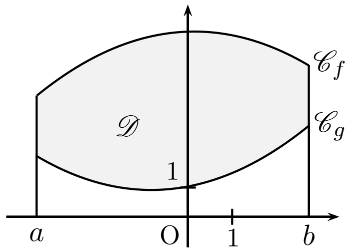
$$\text{aire}(\mathscr{D}_f) = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$$



D Aire d'un domaine entre deux courbes

Si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[a;b]$, alors l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[a;b]$ est :

$$\text{aire}(\mathscr{D}) = \int_a^b (f-g)(x)\ \mathrm{d}x$$



II Intégrales et primitives

A Théorème fondamental.

Théorème 2

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f. Donc F est la primitive de f qui s'annule en a.

Exercice 1. Déterminer les dérivée des fonctions suivantes :

a. $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2+1\ \mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}$

b. $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \ln(t)\ \mathrm{d}t$ sur $]0,+\infty[$.

c. $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^{-x} \sin(t)\ \mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On remarquera que H est la composée de la fonction $J : x \mapsto \displaystyle\int_a^x \sin(t)\ \mathrm{d}t$ et de la fonction $u : x \mapsto -x$. (On a $H = J \circ u$)

d. $L : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^x t^2+1\ \mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^x f(t)\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0 ;

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que

$$F'(x) = \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^x tf'(t)\mathrm{d}t$$

c) Montrer que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 0$. (On pourra utiliser que $\displaystyle\int_{-x}^x tf(t)\mathrm{d}t = 0$.)

Exercice 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1],\ F(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est $\mathscr{C}^2$ et calculer $F''(x)$.

b) En déduire

$$F(x) = \int_0^x \int_u^1 f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

B Calcul d'une intégrale

Proposition 3

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. On a alors :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple 1. Calculer les intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 3x^2 - 5x + 1\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x^3-1}{x^2}\ \mathrm{d}x$

Exercices 12,14-17 page 259

C Intégration par partie

Proposition 4

Soient u et v deux fonctions dérivable sur $[a,b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a,b]$ (on parle alors de fonction $\mathscr{C}^1$). On a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$$

III Propriétés des intégrales

f et g sont des fonctions **continues** sur un intervalle $[a;b]$.

A Propriétés algébriques

Proposition 5 (Linéarité de l'intégration)

- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$
- Pour tout nombre rél λ, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\ \mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$

Exemple 2. Soit $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ \mathrm{d}x$ et $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ \mathrm{d}x$. Calculons $A+B$ et $A-B$ pour en déduire la valeur de A et B.

Proposition 6 (Relation de Chasles)

Pour tout nombre réel c, de $[a;b]$, $\displaystyle\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$

B Intégrales et inégalités

Proposition 7 (Positivité)

- Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Proposition 8 (Ordre)

Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

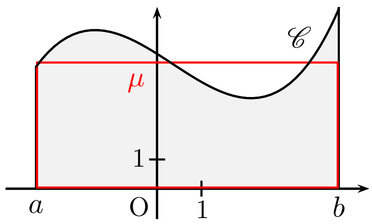
C Valeur moyenne

Définition 2

La **valeur moyenne** d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a < b$) est le nombre réel μ défini par

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation graphique : cas où f est positive sur $[a;b]$



Dans un repère orthogonal, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.

On a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$

Donc l'aire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est égale à l'aire du rectangle de dimensions μ et $(b-a)$

Exemple 3. La valeur moyenne de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

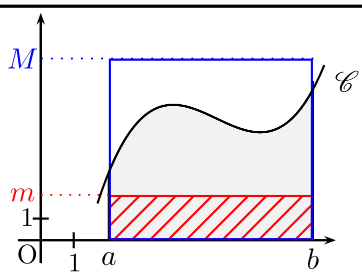
Théorème 9 (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a et b deux nombres de I tels que $a < b$.
Si m et M sont deux nombres tels que pour tout x de $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

On a alors un encadrement de la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ soit :

Interprétation graphique : cas où f est positive sur $[a;b]$



Si f est bornée sur $[a;b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne signifie que l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[a;b]$ est comprise entre les aires des rectangles de dimensions $(b-a)$ et respectivement m et M.

Exemple 4. Trouver un encadrement de la valeur moyenne sur $[1,2]$ de la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f & : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 3\ln^2 x + 2 \end{array}$$