Chapitre 13 : Lois normales.

I Attendus.

- Savoir utiliser la calculatrice pour déterminer des probabilité relative à la loi normale. *(1 page 401 et 11 page 405)*
- Déterminer un seuil. *(6 page 403)*
- Déterminer l'espérance si l'on connait l'écart type et une probabilité. *(12 page 405)*
- Toutes les méthodes de la partie *Méthodes*.

II Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

Exercice 1. Dans cet exercice, on considère la fonction densité définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}$$

1. Déterminer la dérivée de la fonction f, puis dresser son tableau de variation.
2. Faire une représentation graphique de f à la calculatrice.
3. On rappel que pour une variable aléatoire X, de densité f, on définie la probabilité d'être sur un intervalle $[a,b]$ par :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

A l'aide de la calculatrice, déterminer des valeurs approchées les probabilités suivantes :

(a) $P(0 \leqslant X \leqslant 0,7)$
(b) $P(-0,7 \leqslant X \leqslant 0,7)$
(c) $P(-2 \leqslant X \leqslant 2)$
(d) $P(X \leqslant 0)$
(e) $P(X \geqslant 0)$
(f) $P_{(X \geqslant 0)}(X \geqslant 1)$

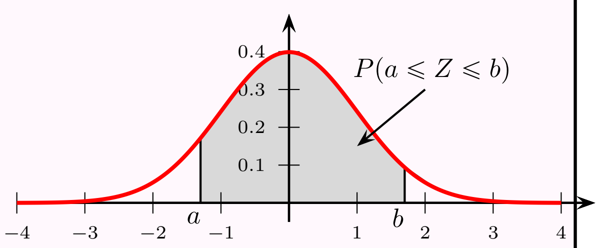
A Définition

Définition 1

Dire qu'une variable aléatoire Z suit la **loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0;1)$, signifie que sa densité de probabilité est la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\epsilon^{-\frac{x^2}{2}}$.

Proposition 1

1. φ est continue, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tous nombres réels a et b tels que $a \leqslant b$, $P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \varphi(x)\ dx$.



La probabilité que Z soit compris entre a et b est l'aire du domaine sous la courbe entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

3. L'aire totale sous la courbe est égale à 1, elle représente $P(Z \in]-\infty;+\infty[)$.
4. La fonction φ est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisse et donc $P(Z \in [0;+\infty[) = \frac{1}{2}$.
On dit que la courbe représentative de φ est une courbe «**en cloche**».

B Calcul de probabilités et fonction de répartition.

Pour calculer des probabilités, il est pratique d'introduire la fonction Φ définie ci-dessous.

Définition 2

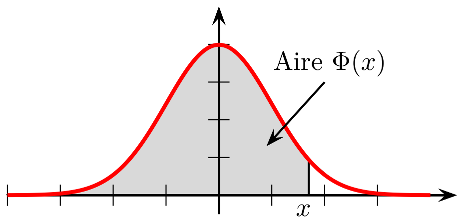
Z étant une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, on pose pour tout réel x : $\Phi(x) = P(Z \leqslant x)$.
Cette fonction est appelée **fonction de répartition** de la loi normale centrée réduite.

Le nombre $\Phi(x)$ est l'aire du domaine sous la courbe en cloche représentée ci-contre.

Ainsi $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$ d'après la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des abscisses.

Φ est la primitive de φ qui vérifie $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$

La fonction Φ s'appelle la **fonction de répartition** de Z. Φ ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires. Les tableurs et calculatrices permettent d'obtenir des valeurs approchées.



Théorème 2

Si une variable Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, alors pour tous les nombres a et b tels que $a \leqslant b$, on a :

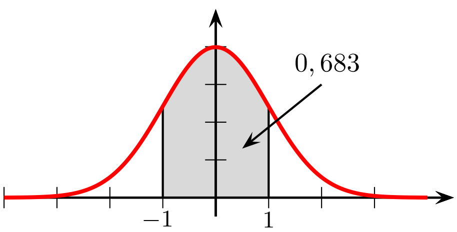
$$P(a \leqslant Z \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(b)$$

Théorème 3

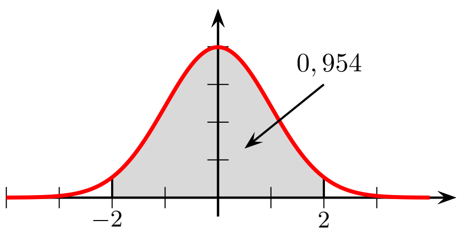
Pour tout nombre réel x, on a : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Exemple 1. $\Phi(1,58) \approx 0,943$ donc $\Phi(-1,58) \approx 0,057$ On peut en déduire : $P(Z > 1,58) = P(Z \leqslant -1,58) \approx 0,057$
$P(-1,58 < Z < 1,58) = \Phi(1,58) - \Phi(-1,58) = 1 - 2 * \Phi(-1,58) \approx 0,886$ et $P((Z > 1,58) \cup (Z < 1,58)) \approx 0,114$

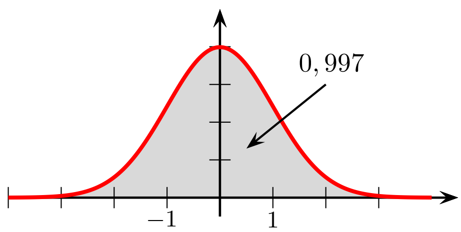
Valeurs approchées à connaître pour $\mathcal{N}(0;1)$



$P(-1 < Z < 1) \approx 0,683$



$P(-2 < Z < 2) \approx 0,954$



$P(-3 < Z < 3) \approx 0,997$

C Espérance et variance

Proposition 4

Si une variable Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, alors son espérance vaut 0 et sa variance vaut 1.

D Cas d'un intervalle centré en 0

Proposition 5

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.
Pour tout nombre $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique nombre strictement positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha < Z < u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Exemples à connaître

$u_{0,05} \approx 1,96$ $\quad P(-1,96 < Z < 1,96) \approx 0,95$

$u_{0,01} \approx 2,58$ $\quad P(-2,58 < Z < 2,58) \approx 0,99$

Exercices 7 à 10 page 403 puis 20 à 26 page 407

III Loi normale $\mathscr{N}(\mu; \sigma^2)$

A Loi normale d'espérance μ et d'écart type σ

Définition 3

Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathscr{N}(\mu; \sigma^2)$ signifie que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathscr{N}(0; 1)$.

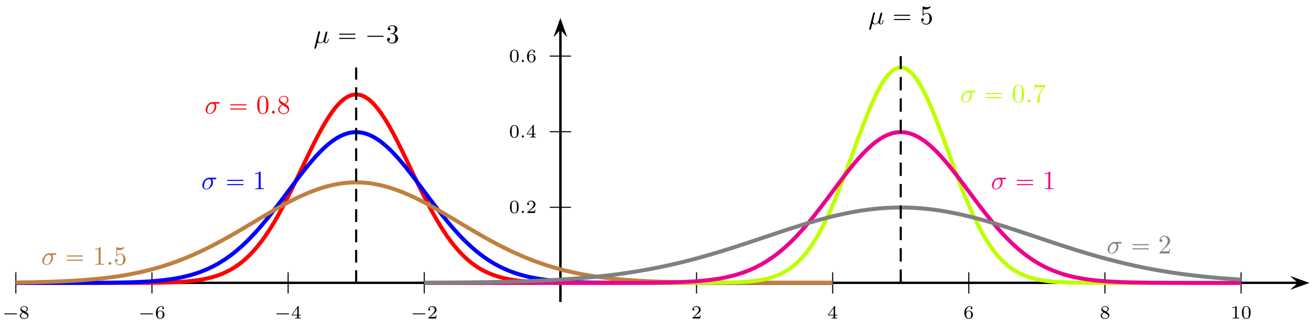
Théorème 6

Si une variable aléatoire suit une loi normale $\mathscr{N}(\mu; \sigma^2)$ alors son **espérance** est μ et sa **variance** est σ^2.

Remarque : Une loi normale $\mathscr{N}(\mu; \sigma^2)$ est une loi à densité, donc il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous les nombres réels a et b, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ (mais l'expression de $g(t)$ n'est pas au programme).

B Allure des courbes de densité

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathscr{N}(\mu; \sigma^2)$.
On pose $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Z suit la loi normale $\mathscr{N}(0; 1)$ et on a $X = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$
Cela suggère que la densité de probabilité X est représentée par une courbe en cloche, mais dont l'axe de symétrie a pour équation $\ldots\ldots\ldots\ldots$ et qui est plus ou moins étirée horizontalement selon la valeur de σ. L'aire sous la courbe étant égale à 1, plus σ est grand et plus le sommet de la courbe est bas.



Exercices 13 et 14 page 405 puis 38 à 55 pages 409-410

IV Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème 7 (Théorème de Moivre-Laplace)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et soit Z la variable aléatoire $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)} = \dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pour tous nombres a et b tels que $a \leqslant b$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \epsilon^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$

Autrement dit, pour les grandes valeurs de n, la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ est très proche de la loi normale de même espérance np et de même variance $np(1-p)$.
Quand $n \geqslant 30$**,** $np \geqslant 5$ **et** $n(1-p) \geqslant 5$, l'erreur sur les probabilités calculées est très faible. On ne fera donc l'approximation que lorsque ces trois conditions seront vérifiées.

V Méthodes

On considère $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$**, et** $T \sim \mathcal{N}(0;1)$**.**

A Que peut-on déduire, si l'on connait $P(X \leqslant a)$.

1 Détermination de a connaissant $P(X \leqslant a)$.

	avec la TI	Avec la Casio.
Trouver a avec $P(X \leqslant a) = \alpha$	"2^{nde}" et "VAR/Distrib" puis saisir : InvNormCD(α,σ,μ)	"OPTN", puis dans l'ordre "STAT", "DIST" "NORM" et "InvN" puis saisir InvNormCD(α,σ,μ)

2 Si l'on connait l'espérance : μ.

Méthode 1

Soit $X \sim \mathcal{N}(5;\sigma)$, et $P(X \leqslant 6,5) = 0,95$.
$1^{ière}$ **étape : On se "ramène" à la normale centrée réduite.**
On a $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-5}{\sigma}$ suit la loi normale centré réduite :

$$P(X \leqslant 6) = P\left(\frac{X-5}{\sigma} \leqslant \frac{6,5-5}{\sigma}\right) = P\left(T \leqslant \frac{1,5}{\sigma}\right) = 0,95$$

$2^{ième}$ **étape : Utilisation de InvNormale.**
Avec la machine $InvNormal(0.95,1,0) \simeq 1,6449$.
$3^{ième}$ **étape : détermination de** σ**.**
On obtient donc : $\dfrac{1,5}{\sigma} \simeq 1,6449 \Leftrightarrow \sigma \simeq \dfrac{1,5}{1,6449} \simeq 0,9119$

3 Si l'on connait l'écart type σ.

Méthode 2

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu;2)$, et $P(X \leqslant 7) = 0,9$.
$1^{ière}$ **étape : On se "ramène" à la normale centrée réduite.**
On a $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-\mu}{2}$ suit la loi normale centré réduite :

$$P(X \leqslant 7) = P\left(\frac{X-\mu}{2} \leqslant \frac{7-\mu}{2}\right) = P\left(T \leqslant \frac{7-\mu}{2}\right) = 0,9$$

$2^{ième}$ **étape : Utilisation de InvNormale.**
Avec la machine $InvNormal(0.9,1,0) \simeq 1,2816$.
$3^{ième}$ **étape : détermination de** μ**.**
On obtient donc : $\dfrac{7-\mu}{2} \simeq 1,2816 \Leftrightarrow \sigma \simeq 7-\mu \simeq 2 \times 1,2816 = 2,5631 \Leftrightarrow \mu \simeq 7-2,5631 \simeq 4,437$

Remarque 1. On peut faire pareille avec $P(X \geqslant a)$.

B Cas d'un intervalle centré sur μ.

Rappel : On a les approximations :

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \simeq 0,68$.
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \simeq 0,95$. (Une formule plus exacte : $P(\mu - 1,96\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 1,96\sigma) \simeq 0,95$)
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \simeq 0,997$.

1 Déterminer un intervalle centré.

Méthode 3

Pour déterminer un intervalle pour que *" la probabilité d'être dans cet intervalle soit de 95% ?" :* (C'est le cas le plus courant)
On considère X suivant une loi normale d'espérance 5,5 et d'écart type $1,55$. Pour déterminer un intervalle centré sur 5,5 ayant une probabilité de 95% d'être réaliser, on utilise $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \simeq 0,95$. Dés lors $P(X \in [2,45; 8,65]) \simeq 0,95$.

Remarque 2. On obtiendra une meilleure approximation avec $P(1,96 \leqslant T \leqslant 1,96) \simeq 0,95$ et l'intervalle obtenue est alors :

$$[5,5 - 1,96 \times 1,55; 5,5 + 1,96 \times 1,55] = [2,462; 8,538]$$

2 Déterminer un écart type à partir d'un intervalle centré.

Méthode 4

Soit X une variable suivant une loi normale d'espérance 7,35 et d'écart type noté σ.
Si l'on sait que la probabilité $P(6,09 \leqslant X \leqslant 8,61) = 0,95$.
$1^{ière}$ étape :
On remarque que $7,35 - 6,09 = 8,61 - 7,35 = 1,26$ donc :

$$[6,09; 8,61] = [7,35 - 1,26; 7,35 + 1,26]$$

L'intervalle est donc centré sur 7,35 l'espérance de X. Donc on utilise $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \simeq 0,95$. Donc :

$$2\sigma = 1,26 \Leftrightarrow \sigma = 0,63$$

Remarque 3. On peut faire un peu mieux en faisant : $\sigma = \dfrac{1,26}{1,96} = 0,643$.