Chapitre 13 : suite, monotonie et convergence

Ce chapitre vise à développer une idée intuitive de limite. Les notions mathématiques en lien avec ce chapitre de sont pas au programme et peuvent parfois être complexes et très abstraites.

I Attendus

- Savoir représenter les termes d'un suite de la forme $u_n = f(n)$ *à la machine* ou *à la main.*
- Savoir représenter les termes d'un suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ *à la machine* ou *à la main.*
- Savoir conjecturer le sens de variation d'une suite (*à partir de sa représentation graphique* ou *du calcul des premiers termes* ainsi que sa limite éventuelle. *(Ex 1 page 17 et 1 page 19)*
- Savoir démontrer qu'une suite est monotone :
  - Pour une suite arithmétique. *(Ex 3 page 17)*
  - Pour une suite géométrique. *(Ex 3 page 17)*
  - Par l'étude du signe de l'expression $u_{n+1} - u_n$. *(Ex 2 page 17)*
- Avoir une approche intuitive des théorèmes de convergence monotone.
- Écrire un algorithme de calcul des termes d'une suite.
- Utiliser un tableur pour déterminer les valeurs d'une suite.

II Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques.

	Suite arithmétique	**Suite géométrique**
Formule de récurrence.	• $u_{n+1} = u_n + r$ (où r est la raison) Si $u_{n+1} - u_n = r$ alors (u_n) est arithmétiques de raison r.	• $v_{n+1} = q \times v_n$ (où q est la raison) Si $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q$ alors (v_n) est géométrique de raison q.
Variations.	• Si $r > 0$ la suite (u_n) est croissante. • Si $r < 0$ la suite (u_n) est décroissante.	<table><tr><td></td><td>1^{ier} terme > 0</td><td>1^{ier} terme < 0</td></tr><tr><td>Si $0 < q < 1$</td><td>$u_n \searrow 0$</td><td>$u_n \nearrow 0$</td></tr><tr><td>Si $q = 1$</td><td>u_n constante</td><td>u_n constante</td></tr><tr><td>Si $1 < q$</td><td>$u_n \nearrow +\infty$</td><td>$u_n \searrow -\infty$</td></tr></table>
Limite.	• Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. • Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.	• Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. • Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$. • Si $1 < q$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
Expression en fonction de n.	• $u_n = nr + u_0$. • $u_n = (n-k)r + u_k$.	• $v_n = q^n v_0$. • $v_n = q^{n-k} v_k$.
Somme de termes.	• $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ • $\dfrac{1^{ier}\text{terme} + \text{der terme}}{2}$nb termes	• $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ • $1^{ier}\text{terme} \times \dfrac{q^{\text{nb termes}} - 1}{q-1} = 1^{ier}\text{ter} \times \dfrac{1 - q^{\text{nb ter}}}{1-q}$

Ex 51 page 21 page 31, 27 page 32, 49, 51 page 34

III Monotonie d'une suite.

Proposition 1

Soit (u_n) une suite réelle. Alors :

- On dit que (u_n) est croissante (respectivement strictement croissante) si et seulement si pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \qquad \text{respectivement } u_{n+1} - u_n > 0$$

- On dit que (u_n) est croissante (respectivement strictement croissante) si et seulement si pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \qquad \text{respectivement } u_{n+1} - u_n < 0$$

Exemple 1. La suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + n + 3$$

Exemple 2. La suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+2}$$

Exemple 3. La suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

Exemple 4. La suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Exemple 5. La suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0,5u_n + 2$$

Vidéo 1

Vidéo fondamentale sur la représentation d'une suite récurrente

Ex 7 page 23 puis 38 à 44 page 33, 64, 70 pages 34 à 40

IV Notions de convergence.

A Approche intuitive

Ex 8 page 23 puis 45-47, 66,

B Théorèmes de convergence monotone.

Définition 1

Soit (u_n) une suite réelle.

- La suite (u_n) est dite majorée si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$$

- La suite (u_n) est dite minorée si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$$

- La suite (u_n) est dite bornée si :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$$

Proposition 2

- Toute suite croissante est
  - soit majorée et alors elle est convergente.
  - soit non majorée et alors sa limite est $+\infty$ (on dit alors qu'elle diverge vers $+\infty$)

  majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est
  - soit minorée et alors elle est convergente.
  - soit non majorée et alors sa limite est $-\infty$ (on dit alors qu'elle diverge vers $-\infty$)

V Algorithme

Exemple 6. La suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0,5u_n + 2$$

A Calcul des termes d'une suite récurrente.

```
u = 1        # on initialise u au premier terme de la suite
n = 5        # on veut calculer le terme de rang 5
index = 0    # le premier terme est de rang 0
while index <= 5:      # tant qu'on n'a pas atteint 5...
        u = 0.5*u+2           # ...on calcule le terme suivant
        index = index + 1 # on passe au rang suivant
print(u)               # on affiche u5
```

B Seuil pour la convergence d'une suite.

Pour l'exemple, on constate que la suite semble converger vers 4 en croissant. Pour trouver le rang à partir du quel la suite est proche de 4 avec une précision de 0,01 par exemple.

```
u = 1        # on initialise u au premier terme de la suite
index = 0    # le premier terme est de rang 0
while u <= 3.99:      # tant qu'on n'a pas atteint 5...
        u = 0.5*u+2           # ...on calcule le terme suivant
```

```
        index = index + 1 # on passe au rang suivant
    print(u)              # on affiche l'indice du premier terme superieur a 3,99
```

Ex 84-85-86 page 41

VI Tableur

TP 4 à 6 pages 26 et 27, 79 page 39