# Chapitre 14 : Loi des grands nombre

## I Variables aléatoires discrètes.

### A Exemple.

**Exemple 1.** Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à 6 faces.
L'univers des possibles $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Maintenant, on considère que la personne qui lance le dé reçoit :

- 50 €, s'il obtient le nombre 6 lors du lancé .
- 20 €, s'il obtient les nombre 4 ou 5 lors du lancé.
- il donne 30 € sinon.

Si l'on note la fonction $X$ qui au résultat du lancer donne la somme obtenu par le joueur.

**Exemple 2.** Si l'on considère l'expérience qui consiste à lancer une pièce. Ensuite au affecte 1 lorsque l'on obtient "face" et 0 si l'on obtient "pile". On définie ainsi une variable aléatoire $Y$ tel que :

$$Y : \Omega = \{Pile\ ,\ Face\} \to Y(\Omega) = \{0, 1\}$$

La loi de probabilité, si la pièce est équilibrée, est donné par :

### B Définition.

**Définition 1**

Si pour une expérience aléatoire, on note $\Omega$ l'ensemble des issues possibles.
On appelle **variable aléatoire réelle** toute application à valeurs réelles de $\Omega$.
(C'est-à-dire $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to X(\Omega) \subset \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Si $X(\Omega) = (x_i)_{i \in D}$ avec $D \subset \mathbb{N}$ (avec $x_i \in \mathbb{R}$), on parlera de variable aléatoire réelle discrète.
Cette année on rencontrera essentiellement le cas où $D = [\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
La donnée des valeurs de $P(X = x_i)$ sera appelée **la loi de probabilité** de la variable $X$.

**Proposition 1**

La somme des probabilités vaut 1 :

$$\sum_{i \in D} P(X = x_i) = 1$$

**Vidéo 1**

Déterminer une loi de probabilité 1 et Vidéo 2

**Ex 1 à 21 page 324 à 326 : faire en priorité les exercices verts.**

### C Espérance et variance.

**Définition 2**

Avec les notations de la définition précédente, l'espérance si elle existe est définie par :

$$E(X) = \sum_{i \in D} x_i P(X = x_i)$$

La variance, si elle existe est définie par :

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

Et enfin l'écart type (si la variance existe) est définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

### D Propriétés de l'espérance, de la variance et de l'écart type.

**Proposition 2**

Avec les notations de la définition précédente. Soient $a$ et $b$ deux réels. On a : $E(aX+b) = aE(X)+b$

**Proposition 3**

On peut aussi calculer la variance par la formule :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \left(\sum_{i \in D} x_i^2 P(X = x_i)\right) - E(X)^2$$

**Proposition 4**

Si $a$ et $b$ sont deux réels on obtient :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Et donc :

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

## II Somme de variables aléatoires.

**Définition 3**

Lorsque $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires, $X+Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les sommes des valeurs possibles de $X$ et $Y$.

**Exemple 3.** On lance un dé à 6 faces et 1 à 4 faces. On note $X$ la valeur obtenue par le premier dé et $Y$ par le second.

Loi de probabilité, espérance et variance ?

**Proposition 5**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

(plus généralement $E\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n X_n\right) = \sum_{n=1}^{N} E(\lambda_n X_n)$.
Si de plus les deux variables sont indépendantes :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

*Remarque* 1. Attention si les deux variables sont indépendantes :

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y)$$

# III Inégalités de concentration

## A Inégalité de Markov

**Proposition 6**

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs positives et soit $a \in ]0, +\infty[$ :

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

## B Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**Proposition 7**

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs positives et soit $a \in ]0, +\infty[$ :

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

# IV Loi des grands nombres

## A Pour la loi binomiale

**Proposition 8**

Si $(X_i)_{[1,n]}$ $n$ suivant un même loi de Bernoulli de paramètre $p$. Alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ détermine le nombre de succés parmi les $n$ épreuve de Bernoulli associées aux $(X_i)_{[1,n]}$, suit une loi binomiale de paramètre $n, p$.

**Définition-Proposition 9**

Si $(X_i)_{\lfloor 1,n \rfloor}$ $n$ suivant un même loi de Bernoulli de paramètre $p$. Alors $M_n = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ s'appelle la fréquence empirique associée aux $(X_i)_{\lfloor 1,n \rfloor}$
Si $a \in ]0, +\infty[$, alors :

$$P\left(\left|S_n - np\right| \geqslant a\right) \geqslant \frac{np(1-p)}{a^2} \qquad \text{et} \qquad P\left(\left|M_n - p\right| \geqslant a\right) \geqslant \frac{p(1-p)}{na^2}$$

## B cas général

**Définition-Proposition 10**

Si $(X_i)_{\lfloor 1,n \rfloor}$, $n$ variables aléatoires identiques et indépendantes. On note $M_n = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ la moyenne empirique associée aux $(X_i)_{\lfloor 1,n \rfloor}$
Si $a \in ]0, +\infty[$, alors :

$$P\left(\left|M_n - E(X_1)\right| \geqslant a\right) \geqslant \frac{V(X_1)}{na^2}$$

Donc cette probabilité tend vers 0.
On dit que $M_n$ qu'elle tend en probabilité vers $E(X_1)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$