Chapitre 14 : Matrices.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des scalaires.

I Généralités sur les matrices

A Définitions de base

Définition 1

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle matrice de taille $n \times p$ un tableau A d'éléments de $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes.
On notera $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou $A = (A_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$.
On écrit la matrice A sous la forme suivante

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ (resp. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).
Si $n = 1$ on parle de matrice ligne, si $p = 1$ on parle de matrice colonne.
Si $n = p$ on parle de matrice carrée

Remarque 1. On écrit alors simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lien de $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ l'ensemble des matrices carrées

Exemple 1. — $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

— $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & i \\ 21+2i & 8 & e^{i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$

Définition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ deux matrices . On dit que A et B sont égales et on note $A = B$ si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \qquad A_{i,j} = B_{i,j}$$

Exemple 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos(0) & e^{i\pi} \\ \tan(0) & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors $A = B$ mais $A \neq C$ et $B \neq C$.

Définition 3

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ on définit les matrices suivantes

— La i-ème ligne de A est la matrice ligne

$$L_i = \begin{pmatrix} A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,p} \end{pmatrix}$$

— La j-ème colonne de A est la matrice colonne

$$C_j = \begin{pmatrix} A_{1,j} \\ A_{2,j} \\ \vdots \\ A_{n,j} \end{pmatrix}$$

B Matrices particulières

Définition 4

- On appelle matrice nulle de taille $n \times p$ la matrice notée $0_{n\times p}$ dont tous les coefficients sont nuls.
- On appelle matrice identité de taille n la matrice carrée notée I_n définie par

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 5

- Une matrice A carrée de taille n est dite diagonale si tous ses coefficients sont nuls sauf éventuellement ceux de sa diagonale. On a donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \quad i \neq j \Rightarrow A_{i,j} = 0$$

Remarque 2. I_n est en particulier une matrice diagonale de taille n

- Soit $(\lambda_1, \cdots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $Diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$ la matrice diagonale de taille n définie par

$$Diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Un matrice carrée B de taille n est dite triangulaire supérieure si tous ses coefficients sous la diagonale sont nuls, c'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \quad i > j \Rightarrow B_{i,j} = 0$$

On a donc

$$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & \cdots & B_{1,n-1} & B_{1,n} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & \cdots & B_{2,n-1} & B_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque 3. On définit de manière similaire les matrices triangulaires inférieure comme les matrices dont les coefficients au dessus de la diagonale sont nuls

- Une matrice M de taille $n \times p$ est dit échelonnée si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \quad i > j \Rightarrow M_{i,j} = 0$$

Remarque 4. Les matrices triangulaires supérieures sont les matrices échelonnées carrées.

II Opération sur les matrices

A Addition, multiplication par un scalaire

Définition 6

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$
On définit la matrice $A + B$ par

$$A + B = (A_{i,j} + B_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

Il s'agit donc de la matrice obtenue en additionnant les coefficients de A et ceux de B.

Proposition 1

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$, on a alors
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + B = B + A$
- $A + 0_{n,p} = A$

Remarque 5. On écrira alors $A + B + C$

Démonstration. Il s'agit de simples conséquences de la définition. □

Définition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit le produit de A par λ noté $\lambda \cdot A$ par

$$\lambda \cdot A = (\lambda A_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

On multiplie donc chaque coefficient de A par λ

Remarque 6. On n'écrit jamais $A \cdot \lambda$

Remarque 7. Si le contexte est clair et qu'aucune confusion n'est possible, en particulier avec le produit matriciel défini ci-après, alors on pourra se passer du $\cdot$ et écrire simplement λA

Remarque 8. On n'écrira par contre jamais $A\lambda$

Proposition 2

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a alors
- $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$
- $1 \cdot A = A$ et $0 \cdot A = 0_{n,p}$
- $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
- $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$

Démonstration. Il s'agit de simples conséquences de la définition. □

B Produit matriciel

Définition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit le produit $A \times B$ comme la matrice de taille $n \times q$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!] \qquad (A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}$$

On a le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{p,1} \end{matrix}} & \cdots & \begin{matrix} b_{1,q} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{p,q} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \cdots \quad a_{1,p}} \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1} \quad a_{n,2} \quad \cdots \quad a_{n,p} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,1}} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,q} \\ \vdots & \vdots & \\ \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} b_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} b_{k,q} \end{pmatrix}$$

Remarque 9. Faire EXTRÊMEMENT attention aux dimensions de A et B

Remarque 10. — Pour pouvoir définir le produit $A \times B$ il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
Schématiquement $(n \times p)$ multiplié par $(p \times q)$ donne $(n \times q)$.
— Si le contexte est clair et qu'aucune confusion est possible on écrira AB plutôt que $A \times B$

Remarque 11. En particulier si $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ alors $A \times B \in \mathcal{M}_n \mathbb{K}$

Proposition 3

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a
- $AI_p = A$, $I_n A = A$
- $A0_{p,q} = 0_{n,q}$, $0_{r,n}A = 0_{r,p}$

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, on a alors

$$\begin{aligned} (AI_p)_{i,j} &= \sum_{k=1^p} A_{i,k}(I_p)_{k,j} \\ &= A_{i,j} \times 1 \qquad ((I_p)_{k,j} = 0 \text{ si } k \neq j) \\ &= A_{i,j} \end{aligned}$$

On prouve de même que $I_n A = A$.
Il est clair que $A0_{p,q} = 0_{n,q}$ et $0_{r,n}A = 0_{r,p}$ □

Proposition 4

Soit A, B et C trois matrices et $\lambda \in \mathbb{K}$. Lorsque les opération effectuées sont licites, on a
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $A \times (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \times B = \lambda \cdot (A \times C)$

Remarque 12. On écrira alors $A \times B \times C$

Remarque 13. On écrit alors λAB

Démonstration. Il suffit de calculer les coefficients pour vérifier les égalités.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$.

On a

$$\begin{aligned}(A\times(B\times C))_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}(B\times C)_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}\sum_{\ell=1}^{q} B_{k,\ell}C_{\ell,j}\\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} A_{i,k}B_{k,\ell}C_{\ell,j}\\ &= \sum_{\ell=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,\ell}C_{\ell,j}\\ &= \sum_{\ell=1}^{q} C_{\ell,j}\sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,\ell}\\ &= \sum_{\ell=1}^{q} C_{\ell,j}(A\times B)_{i,\ell}\\ &= \sum_{\ell=1}^{q}(A\times B)_{i,\ell}C_{\ell,j}\\ &= ((A\times B)\times C)_{i,j}\end{aligned}$$

Les autres résultats se prouvent de manière similaire. □

Remarque 14. Le produit matriciel ne se comporte pas toujours comme le produit usuel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Énumérons certaines erreurs

— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. En général on a

$$A\times B \neq B\times A$$

Par exemple soit

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$$

On a alors

$$AB=\begin{pmatrix}4&6\\0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad BA=\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix}$$

Autant que possible on précisera alors si on multiplie A par B à droite (c'est-à-dire le produit AB) ou à gauche (le produit BA).

— Comme le produit n'est pas commutatif, de nombreuses manipulations usuelles sur les scalaires sont fausses sur les matrices. Par exemple les identités remarquables ne sont plus vraies. On a

  — $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$, en général $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$

  — $(A-B)(A+B) = A^2+AB-BA-B^2$, en général $(A-B)(A+B) \neq A^2-B^2$

De même la formule du binôme de Newton ne sera pas vraie en général.

— Soit $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors $C\times D = 0_{n,q}$ **n'implique pas que** $C = 0_{n,p}$ ou $D = 0_{p,q}$.
Par exemple soit

$$C=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&4&4\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}-2&4\\5&-10\\4&-8\end{pmatrix}$$

On a alors

$$C\times D=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad D\times C=\begin{pmatrix}2&12&-6\\-5&-30&35\\-4&-24&28\end{pmatrix}$$

— Une conséquence importante est qu'il n'est pas possible de « simplifier »par une matrice A , même si $A \neq 0$.

$AB = AC$ **n'implique pas** que $B = C$.

— Last but not least, une des pires erreurs que vous puissiez faire serait de diviser par une matrice. **En aucun cas, dans aucune situation, on ne peux diviser par une matrice**. Le faire vous voudra l'ire éternelle du correcteur et de votre professeur.

Proposition 5

Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots \mu_n) \in \mathbb{K}^{2n}$.

— Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. En particulier on a

$$Diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n) \times Diag(\mu_1, \cdots \mu_n) = Diag(\lambda_1\mu_1, \cdots \lambda_n\mu_n)$$

— Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Démonstration. Il suffit de calculer les coefficients □

Définition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit par récurrence les puissances successives de A par

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{p+1} = A \times A^p = A^p \times A \end{cases}$$

On a ainsi

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$$

Remarque 15. Si A n'est pas une matrice carrée on ne peut pas définir A^p.

Proposition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a

— $A^p \times A^q = A^{p+q}$

— $(A^p)^q = A^{pq}$

Démonstration. Simple conséquence de la définition □

Remarque 16. Si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $p \in \mathbb{N}$ en général on n'a pas $(AB)^p = A^pB^p$. On a en effet $(AB)^n = ABAB \cdots AB$, ce qui, en général, est différent de A^nB^n.

Définition 10

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A et B commutent si $AB = BA$.

Proposition 7

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ deux matrices qui commutent et $n \in \mathbb{N}$. On a alors

— $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

— $(A - B)(A + B) = (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

— $(AB)^n = A^nB^n$

— $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^kB^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k$

C Transposition

Définition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit la matrice transposée de A, notée ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par

$${}^tA_{i,j} = A_{j,i}$$

Moralement on obtient ${}^tA$ en faisant une symétrie des coefficients de A par rapport à sa diagonale.

Remarque 17. On trouve parfois la notation A^T

Proposition 8

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a
- $^t\left({}^tA\right) = A$
- $^t(A+B) ={}^t A +{}^t B$
- $^t(A \times C) ={}^t C \times{}^t A$
- $^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$

Démonstration. Seule la troisième propriété ne découle pas immédiatement de la définition.
Soit $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$, on a □

Définition 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On dit que A est symétrique si $^tA = A$, c'est-à-dire
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad A_{i,j} = A_{j,i}$$
- On dit que A est antisymétrique si $^tA = -A$, c'est-à-dire
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad A_{i,j} = -A_{j,i}$$

Remarque 18. Ceci implique en particulier que les coefficients diagonaux de A sont nuls

III Écriture matricielle d'un système linéaire

Considérons le système linéaire

$$(S) : \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \forall k \in [\![1,p]\!], \qquad a_{i,k} \in \mathbb{K}, \quad b_i \in \mathbb{K}$$

Notons alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Proposition 9

Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$. $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est solution de (S) si et seulement si $AX = B$ avec les notations introduites plus haut.
On appelle l'écriture $AX = B$ la formulation matricielle du système (S).

Pour résoudre un système linéaire on va utiliser la même méthode que précédemment en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes sauf qu'au lieu de faire les opérations sur le système on va les faire sur les matrices A et B.

Cela a plusieurs intérêts, tout d'abord c'est moins lourd à écrire mais surtout cette méthode va nous permettre d'utiliser l'ordinateur ou la calculatrice pour faire les calculs.

On va introduire une nouvelle notation pour simplifier encore les écritures.

Définition 13

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On introduit la matrice augmentée $(A|B)$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

Remarque 19. $(A|B)$ n'est pas vraiment une matrice, c'est juste une écriture condensée pratique pour les calculs

On fera alors nos opérations élémentaires sur les lignes de $(A|B)$.

Exemple 3. Soit

$$S : \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 10 \\ 2x & - & 3y & - & 2y & = & -10 \end{array}\right.$$

On considère la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2$
$L_3 \leftarrow -L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{7}L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

On peut s'arrêter ici, on a alors

$$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ & & y & - & z & = & -1 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right.$$

On « remonte »ensuite le système par substitutions successives pour le résoudre.

On peut aussi continuer à travailler sur la matrice augmentée
$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

On aboutit ainsi à la solution : L'ensemble des solutions de S est $\{(1, 2, 3)\}$.

Définition 14

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Par des opérations élémentaires sur les lignes on peut transformer A en une matrice échelonnée $\tilde{A}$.
On définit le rang de A, notée $\mathrm{rg}(A)$ ou $\mathrm{Rang}(A)$ comme étant le nombre de lignes non-nulles de $\tilde{A}$.
Le rang de A est également le rang des systèmes linéaires $AX = B$ avec $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ quelconque

Remarque 20. $A \neq \tilde{A}$, on dit que A est équivalente à $\tilde{A}$

Exemple 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminons $\mathrm{Rang}(A)$.

$L_2 \leftrightarrow L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi A est équivalente à une matrice de rang 2. A est donc de rang 2.

Théorème 10

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}\left({}^tA\right)$$

Démonstration. Résultat admis □

IV Inversion de matrice

A Définition

On a vu que la multiplication matricielle nous réserve certaines surprises, en particulier la simplification est impossible. Mais qu'entendait-on par simplification ?

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R})^2$ et $c \in \mathbb{R}^*$, on suppose que l'on a

$$ca = cb$$

et on souhaite prouver que $a = b$.

Rigoureusement on ne barre pas simplement les c. On sait qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $cd = dc = 1$ (on notera alors $d = \frac{1}{c}$). On peut alors multiplier de part et d'autre de l'égalité par d, on a donc

$$dca = dcb$$

C'est-à-dire

$$1a = 1b$$

et donc $a = b$.

Peut-on obtenir quelque chose de similaire sur les matrices ? En général non comme on l'a vu plus haut mais, dans certains cas, c'est possible

Définition 15

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est alors unique, on l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}
On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n.

Remarque 21. Il est important que A soit carrée

Remarque 22. Écrire $\frac{1}{A}$ est une horreur absolue et vous vaudra mon inimitié éternelle

Démonstration. Il nous faut prouver l'unicité de B.
Supposons qu'il existe B_1 et B_2 telles que

$$AB_1 = B_1A = I_n \qquad \text{et} \qquad AB_2 = B_2A = I_n$$

On a alors , d'un part

$$B_1AB_2 = B_1I_n = B_1$$

et d'autre part

$$B_1AB_2 = I_nB_2 = B_2$$

D'où $B_1 = B_2$ □

La définition mentionne qu'il faut avoir $AB = BA = I_n$, en pratique c'est un peu plus simple

Théorème 11

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, On a l'équivalence

$$AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$$

Démonstration. Résultat admis □

Corolaire 12

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, si $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ alors $B = A^{-1}$

Exemple 5.
— I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.
— Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

A est inversible et $B = A^{-1}$. En effet on a

$$AB = \begin{pmatrix} 2 + i^2 & -2i + 2i \\ -i + i & (-i)^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Savoir si une matrice est inversible est un problème compliqué mais dans certains cas c'est très simple.

Proposition 13

Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et soit $M = Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
M est inversible si et seulement si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \lambda_i \neq 0$$

Et dans ce cas on a

$$M^{-1} = Diag\left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

Démonstration. Il suffit de faire les calculs. □

Théorème 14

Soit $(A,B)\in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})^2$. Alors

- A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
- AB est inversible et $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1}={}^t\left(A^{-1}\right)$

Remarque 23. $A+B$ n'est elle, en général, pas inversible

Démonstration.
- On a $AA^{-1}=I_n$, ainsi A^{-1} est inversible d'inverse A.
- On a $(AB)(B^{-1}A^{-1})=ABB^{-1}A^{-1}=AI_nA^{-1}=AA^{-1}=I_n$. Ainsi AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.
- On a ${}^tA{}^t\left(A^{-1}\right)={}^t\left(A^{-1}A\right)={}^tI_n=I_n$. Ainsi ${}^tA$ est inversible d'inverse ${}^t\left(A^{-1}\right)$

□

B Détermination de A^{-1}

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on cherche comment déterminer si A est inversible et, le cas-échéant, déterminer A^{-1}.

1 Via le système linéaire associé

On rappelle que si

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

Alors le système

$$(S):\quad\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1\\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2\\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n\end{array}\right.$$

est équivalent à $AX=B$.

Théorème 15

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si, pour tout $B\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX=B$ est de Cramer.

Démonstration.
- Supposons dans un premier temps que A est inversible, on a alors

$$AX=B\Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\Leftrightarrow X=A^{-1}B$$

  Le système $AX=B$ admet donc une unique solution il est de Cramer.
- Supposons maintenant que, pour tout $B\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX=B$ est de Cramer.

  Pour $j\in[\![1,n]\!]$ on définit $e_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ (le 1 se trouve sur la j-ème ligne)

Soit $f_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ l'unique solution de $AX = e_j$.

On définit alors M la matrice carrée de taille n dont, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne est f_j, i.e.

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

On a alors $AM = I_n$, en effet la j-ème colonne de AM est le produit de A et de la j-ème colonne de M c'est-à-dire $Af_j = e_j$.

A est ainsi inversible d'inverse M

□

On a vu dans le chapitre « Systèmes linéaires »un critère reliant le rang du système à son nombre de solutions. On peut le réinterpréter ici via le prisme de l'inversibilité.

Théorème 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si $\text{Rang}(A) = n$.

Démonstration. On sait que S est de Cramer si et seulement si $\text{Rang}(S) = n$, d'où A est inversible si et seulement si $\text{Rang}(A) = n$. □

Avec ce critère on va pouvoir statuer sur l'inversibilité des matrices. Pour cela on utilise des opérations élémentaires sur les lignes pour mettre la matrice sous forme échelonnée et ainsi déterminer son rang.

Proposition 17

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure). T est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non-nuls.

Démonstration. Le système associé est de Cramer si et seulement si il a n pivots non-nuls, c'est-à-dire si et seulement si les n coefficients diagonaux sont non-nuls. □

Dans le cas où A est inversible comment faire pour déterminer A^{-1} ?

On sait qu'alors $AX = B$ est équivalent à $X = A^{-1}B$. Pour calculer A^{-1} on va alors résoudre le système $AX = B$ pour $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ quelconque.

Remarque 24. Si, en résolvant, on obtient plusieurs solutions c'est que, soit A n'est pas inversible, soit on s'est trompé dans le calcul des solutions

Une fois A^{-1} trouvée il est bon de vérifier que l'on a bien $AA^{-1} = I_n$ pour être sur de ne pas avoir fait d'erreurs de calcul lors de la résolution de $AX = B$.

Exemple 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. On va montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}. Pour cela on pose $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et on résout le système $AX = B$.

Considérons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 3 & b_1 \\ 3 & 9 & 4 & b_2 \\ 1 & 5 & 3 & b_3 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftrightarrow L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & b_3 \\ 3 & 9 & 4 & b_2 \\ 2 & 7 & 3 & b_1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & b_3 \\ 0 & -6 & -5 & b_2 - 3b_3 \\ 0 & -3 & -3 & b_1 - 2b_3 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & b_3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{-1}{6}b_2 + \frac{1}{2}b_3 \\ 0 & -3 & -3 & b_1 - 2b_3 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & b_3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{-1}{6}b_2 + \frac{1}{2}b_3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3 \end{array}\right)$$

Notre système est de rang 3, ainsi A est bien inversible.
$L_3 \leftarrow -2L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & b_3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{-1}{6}b_2 + \frac{1}{2}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2b_1 + b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{6}L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 6b_1 - 3b_2 - 2b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3}b_1 + b_2 - \frac{1}{3}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2b_1 + b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3}b_1 + 2b_2 - \frac{1}{3}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3}b_1 + b_2 - \frac{1}{3}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2b_1 + b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

Ainsi

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3}b_1 + 2b_2 - \frac{1}{3}b_3 \\ -\frac{5}{3}b_1 + b_2 - \frac{1}{3}b_3 \\ -2b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} B$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 25. Réconciliez vous avec les fractions car, sauf dans certains exercices soigneusement calibrés, elles sont inévitables dans le calcul des inverses

Cette méthode est efficace mais il peut être lourd de se trainer les coefficients $(b_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$. On va donc améliorer la méthode.

2 Par la méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan reprend le principe du pivot de Gauss mais on va utiliser une matrice supplémentaire pour garder la mémoire des opérations que l'on fait.

Le principe est le suivant : On applique des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A à inverser jusqu'à arriver à l'identité I_n. On applique ensuite les mêmes opérations dans le même ordre à I_n, le résultat sera A^{-1}.

Pour faire cela on va encore utiliser l'intermédiaire de calcul que sont les matrices augmentées.

Plus précisément, soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ on considère la matrice augmentée obtenue en rajoutant I_n à droite de A

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

On va appliquer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée jusqu'à ce que la partie gauche soit I_n et alors la partie de droite sera A^{-1}.

Exemple 7. — Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminons si M est inversible et, si c'est le cas, déterminons M^{-1}.

On considère la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On lit le rang de M sur la partie de gauche. M est de rang 3 et est donc inversible.

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On a donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— Reprenons notre exemple précédent, inversons $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

On considère la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftrightarrow L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

V Le cas particulier des matrices 2×2

Définition 16

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On définit le déterminant de A, noté $\det(A)$ par

$$\det(A) = ad - bc$$

On note parfois $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Remarque 26. On retrouve le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en faisant le déterminant de la matrice de leurs coordonnées écrites en colonnes

Théorème 18

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On a

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \det(A)I_2$$

— Supposons $\det(A) \neq 0$, alors $A \times \left(\frac{1}{\det(A)}B\right) = I_2$. A est donc inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

— Supposons que $\det(A) = 0$. Supposons de plus par l'absurde que A est inversible. On a alors $AB = 0_{2,2}$, d'où $A^{-1}AB = 0_{2,2}$, c'est-à-dire $B = 0_{2,2}$ ce qui est clairement absurde. Ainsi A n'est pas inversible.

□