Chapitre 14 : Résumé matrices.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des scalaires.

A Addition, multiplication par un scalaire

Définition-Proposition 1

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$
On définit la matrice $A + B$ par $A + B = (A_{i,j} + B_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $\lambda \cdot A = (\lambda A_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + B = B + A$
- $A + 0_{n,p} = A$

- $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$
- $1 \cdot A = A$ et $0 \cdot A = 0_{n,p}$
- $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
- $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$

B Produit matriciel

Définition 1

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit le produit $A \times B$ comme la matrice de taille $n \times q$ définie par

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!] \qquad (A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}$$

Proposition 2

Soit A, B et C trois matrices et $\lambda \in \mathbb{K}$. Lorsque les opération effectuées sont licites, on a

- $AI_p = A$, $I_nA = A$
- $A0_{p,q} = 0_{n,q}$, $0_{r,n}A = 0_{r,p}$
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $A \times (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \times C = \lambda \cdot (A \times C)$
- $Diag(\lambda_i) \times Diag(\mu_i) = Diag(\lambda_i\mu_i)$
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Proposition 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ (Si A est **inversible**, on peut choisir $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$) , on a

- $A^p \times A^q = A^{p+q}$
- $(A^p)^q = A^{pq}$

Définition-Proposition 4

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A et B commutent si $AB = BA$. On a alors

- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)(A + B) = (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
- $(AB)^n = A^nB^n$
- $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^kB^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k$

Définition-Proposition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit la matrice transposée de A, notée ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par ${}^tA_{i,j} = A_{j,i}$

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(A \times C) = {}^tC \times {}^tA$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$

- On dit que A est symétrique si ${}^tA = A$, c'est-à-dire $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = A_{j,i}$
- On dit que A est antisymétrique si ${}^tA = -A$, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = -A_{j,i}$

C Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition-Proposition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Par des opérations élémentaires sur les lignes on peut transformer A en une matrice échelonnée $\tilde{A}$
On définit le rang de A, notée $\mathrm{rg}(A)$ ou $\mathrm{Rang}(A)$ comme étant le nombre de lignes non-nulles de $\tilde{A}$.
Le rang de A est également le rang des systèmes linéaires $AX = B$ avec $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ quelconque.

On a : $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}\left({}^tA\right)$

D Inversion de matrice

Définition-Proposition 7

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est alors unique, on l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}
On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n.

- $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$
- Si $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ alors $B = A^{-1}$

Soit $(A,B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})^2$ (ensemble des matrices inversibles d'ordre n). Alors

- $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $AB \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ${}^tA \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})et\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$

Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. $Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est inversible si et seulement si $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \neq 0$. Et dans ce cas on a

$$Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^{-1} = Diag\left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

Théorème 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- A est inversible si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ est de Cramer.
- A est inversible si et seulement si $\mathrm{Rang}(A) = n$.
- Si A est une matrice triangulaire. A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non-nuls.

Théorème 9

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas on a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$