

Chapitre 15 : Fonction exponentielle.

I Approche Globale.

A Attendus.

- Savoir manipuler les propriétés algébriques de l'exponentielle pour simplifier une expression.
- Résoudre des équations et inéquations avec la exponentielle.
- Savoir déterminer les variations faisant intervenir l'exponentielle.
- Connaitre les formules de dérivation et déterminer les dérivées de fonctions faisant intervenir l'exponentielle (e^x).
- Savoir utiliser la formule $(e^u)' = u'e^u$.
- Résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir l'exponentielle.
- Faire une étude de fonction faisant intervenir l'exponentielle : calcul de la dérivée et tableau de variation .

B Démonstrations à connaître.

- Unicité de la fonction f définie sur \mathbb{R} et vérifiant :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = f(x)$$

- Propriétés algébriques de l'exponentielle.

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$

- $e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$

- $(e^x)^y = e^{xy}$

- $(e^{nx}) = (e^x)^n$

II Définition.

Définition-Proposition 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = f(x) \quad (1)$$

Cette unique solution est appelée fonction exponentielle et est notée :

$$\exp(x) \quad \text{ou} \quad e^x$$

Corolaire 2

La fonction \exp est continue et dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est elle-même :

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Si l'on considère une fonction u dérivable alors :

$$\exp(u(x))' = u' \times \exp(x)$$

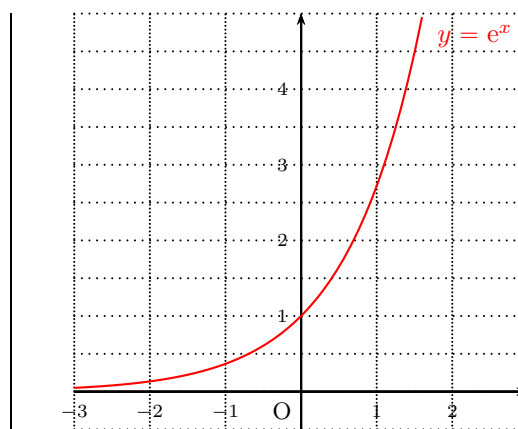
Que l'on note aussi : $(e^u)' = u'e^u$.

Ex 1 à 3 page 192.

III Étude de la fonction exponentielle.

A Tableau de variations et représentation graphique ;

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$	+		
$\exp(x)$	$0 \nearrow 1 \nearrow$		$+\infty$



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
e^x	0,018	0,05	0,135	0,368	1	2,718	7,389	20,086	24,598

Vidéo 1 (Construction de la fonction exponentielle)

La construction de l'exponentielle peut se faire par l'utilisation des tangentes point par point : Méthode d'Euler.

B Limites.

Proposition 3

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$

C Équations et inéquations.

Proposition 4

Soit a et b deux réels. Alors :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Ex 19 à 23 page 194

D Propriétés algébriques et fonctionnelles.

Proposition 5

Si l'on reprend les propriétés de la partie précédente avec l'écriture fonctionnelle, pour tous x et y réels et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(y - x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)}$
- $\exp(x)^y = \exp(xy)$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$
- $e^0 = 1$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $(e^{nx}) = (e^x)^n$

Ex 4 à 14 page 192

E Les exercices classés.

- Définition de la fonction exponentielle : *Ex 1 à 3 page 192.*
- Utiliser les propriétés algébriques sur l'exponentielle : *Ex 4 à 14 page 192.*
- Calculer des fonctions dérivées : *Ex 25 à 30 page 194.*
- Résoudre des équations et des inéquations : *Ex 19 à 24 page 193-194, Ex 37 à 40, 42 page 196*
- Étude de fonctions : *Ex 15 à 18 page 193, Ex 31 à 34 page 194*
- Lecture graphique d'information : *Ex 41 page 196, 57 page 199, Ex 58 page 200, Ex 63 page 201*
- Algorithme : *Ex 31, 36, 47, 62, 65, 67 page 192 à 203.*

IV Compléments.

A Lien avec le logarithme.

Proposition 6

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$
- $\forall x \in]0, +\infty[, e^{\ln x} = x$

B Définition de la puissance.

Définition 1

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x , on définit a^x par :

$$a^x = e^{x \times \ln a}$$