Chapitre 16 résumé : Polynômes.

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A Ensemble des polynômes

Définition 1 (Notation des polynômes)

Soit $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et P l'application polynomiale : $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$

Alors a_i est le coefficient d'indice i de P. Par convention on note X l'application $x \mapsto x$.

Avec ces notations $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ se note $P(X)$ ou $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'**ensemble des polynômes** à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à n.

Définition 2 (Opérations de base)

Soient $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum\limits_{j=0}^{d} b_j X^j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit alors les polynômes suivants :

- $P + Q = \sum\limits_{k=0}^{\max(n,d)} (a_k + b_k) X^k$ où, par convention $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > d$.
- $\lambda P = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$
- $PQ = \sum\limits_{k=0}^{n+d} c_k X^k$ où $\forall k \in [\![0, n+d]\!],\ c_k = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ par convention $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > d$.
- $P \circ Q$ est le polynôme définit par $P \circ Q : x \mapsto P(Q(x))$. Il n'y pas vraiment d'écriture simple de $P \circ Q$.

Définition-Proposition 1 (Degré d'un polynôme)

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non-nul, alors $\deg(P) = \max\{k \in [\![0, n]\!]\ ,\ a_k = 0\}$. On posera $\deg(0) = -\infty$.

Soit P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On a alors (en utilisant les formules d'opération sur les limites)

- $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Définition-Proposition 2 (Polynôme dérivé)

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$. On appelle polynôme dérivé de P le polynôme, noté P' défini par $P' = \sum\limits_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1}$

On appelle k-ième polynôme dérivée de P le polynôme $P^{(k)}$ défini par récurrence $\begin{cases} & P^{(0)} = P \\ \forall k \in \mathbb{N} & P^{(k+1)} = (P^{(k)})' \end{cases}$

- $(\lambda P)' = \lambda P'$
- $(P + Q)' = P' + Q'$
- $(PQ)' = P'Q + PQ'$
- $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$

Si $n \in \mathbb{N}$ on a la formule de Leibniz pour les polynôme $(PQ)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Si $\deg(P) \geqslant k$, alors $\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$

Théorème 3 (Coefficients et dérivation)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k$

Proposition 4 (Égalité de polynômes)

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

B Racines et factorisation

Définition-Proposition 5 (Racine simple d'un polynôme)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non-constant et soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P se factorise par Q s'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = QR$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
P se factorise par $X - \lambda$ si et seulement si λ est une racine de P.

Théorème 6 (factorisation et racines)

Soit P un polynôme nul et soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ des racines distinctes de P. Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_k)Q$$

En particulier on a $k \leqslant \deg(P)$

Définition-Proposition 7 (Racine multiple)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une racine de P s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$P = (X-\lambda)^m Q$$

avec $Q(\lambda) \neq 0$. On appelle alors m l'**ordre de multiplicité** de λ ou simplement la multiplicité de λ.

Dés lors λ est une racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(m)}(\lambda) \neq 0$$

C Existence de racine

Théorème 8 (Polynôme à coefficients complexes : théorème de d'Alembert Gauss)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ (remarquons que $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$). Alors P admet au moins un racine dans $\mathbb{C}$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n. P admet alors exactement n racines complexes comptées avec multiplicité

On remarque alors que si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et P possède strictement plus de n racines alors P est nul.

Proposition 9 (Polynôme à coefficients réels)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité m. Alors $\bar{\lambda}$ est une racine de P de multiplicité m.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Alors P admet au moins une racine réelle.