Chapitre 16 : Polynômes.

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Ensemble des polynômes

A Définitions

Définition 1 (Notation des polynômes)

Soit P est une application définie sur $\mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ polynomiale tel qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un $n+1$-uplet $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

P sera alors appelée application polynomiale et les a_i le coefficient d'indice i de P.
Par convention on note X l'application $x \mapsto x$.
Avec ces notations $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ se note $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (plutôt que $P \circ X$ qui ne sera pas utilisée) et on autorise $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

- On appelle **polynôme nul** le polynôme dont tous les coefficients sont nuls, c'est donc l'application nulle.
- On appelle **polynôme constant** tout polynôme de la forme $P : x \mapsto a_0$.
- On appelle **monôme de degré** k tout polynôme de la forme $P : x \mapsto a_k x^k$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'**ensemble des polynômes** à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque 1. On s'autorise à parler indifféremment de du polynôme ou de la fonction polynomiale associée.

B Opérations de base

Définition 2

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{j=0}^{d} b_j X^j$. On définit alors les polynômes suivants :

- $P+Q$ est le polynôme défini par $P+Q : x \mapsto P(x) + Q(x)$. On a alors

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,d)} (a_k + b_k) X^k$$

  où, par convention $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > d$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, λP est le polynôme défini par $\lambda P : x \mapsto \lambda \times P(x)$. On a alors

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$$

- PQ est le polynôme défini par $PQ : x \mapsto P(x) \times Q(x)$. On a alors

$$PQ = \sum_{k=0}^{n+d} c_k X^k \qquad \text{où} \qquad \forall k \in [\![0, n+d]\!], \qquad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

  là encore, par convention $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > d$.
- $P \circ Q$ est le polynôme définit par $P \circ Q : x \mapsto P(Q(x))$. Il n'y pas vraiment d'écriture simple de $P \circ Q$.

Proposition 1

Soit P un polynôme. P est alors continu sur $\mathbb{R}$

Démonstration. Il est évident que X est continu sur $\mathbb{R}$, X^k est donc continu sur $\mathbb{R}$ en tant que puissance d'une fonction continu. Enfin P est continu sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues. □

Théorème 2

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients réels. Alors $P = 0$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Démonstration.

— Il est évident que si tous les coefficients de P sont nuls alors P est le polynôme nul.

— Réciproquement supposons que P est le polynôme nul, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

On va montrer par récurrence forte sur k que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = 0$

<u>Initialisation</u>

On a $a_0 = P(0) = 0$.

Détaillons comment procéder pour en déduire alors que $a_1 = 0$, cela n'est pas nécessaire pour la récurrence mais permet d'éclairer la construction de la preuve.

Comme $a_0 = 0$ on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k = x \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} x^j$$

Notons $P_1 = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_{j+1} x^j$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = xP_1(x) = 0$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad P_1(x) = 0$$

Or P_1 est continu, ainsi $P_1(0) = \lim\limits_{x\to 0} P_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

Or $P_1(0) = a_1$.

On a donc bien $a_1 = 0$

<u>Hérédité :</u>

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On suppose que $a_0 = a_1 = \cdots = a_k - 1 = 0$ et on va montrer qu'alors $a_k = 0$

Comme $a_0 = a_1 = \cdots = a_k - 1 = 0$ on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{i=k}^{n} a_i x^i = x^k \sum_{l=0}^{n-k} a_{l+k} x^l$$

Notons $P_k = \sum_{l=0}^{n-k} a_{l+k} x^l$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^k P_k(x) = 0$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad P_k(x) = 0$$

Or P_k est continu, ainsi $P_k(0) = \lim_{x\to 0} P_k(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

Or $P_k(0) = a_k$.

On a donc bien $a_k = 0$. Ce qui prouve la propriété au rang k et achève la récurrence.

□

Théorème 3

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes. Alors $P = 0$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Démonstration.
— Il est évident que si tous les coefficients de P sont nuls alors P est le polynôme nul.
— Réciproquement soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Supposons que P est le polynôme nul, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$ notons $a_k = r_k + is_k$ et définissons les deux polynômes R et S par

$$R = \sum_{k=0}^{n} r_k x^k \qquad \text{et} \qquad S = \sum_{k=0}^{n} s_k X^k$$

On a alors $R \in \mathbb{R}[X]$, $S \in \mathbb{R}[X]$ et $P = R + iS$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\Re(P(x)) = \sum_{k=0}^{n} \Re(a_k x^k) = \sum_{k=0}^{n} \Re(a_k) x^k = R(x)$$

$$\Im(P(x)) = \sum_{k=0}^{n} \Im(a_k x^k) = \sum_{k=0}^{n} \Im(a_k) x^k = S(x)$$

D'où, comme $P(x) = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad R(x) = 0, \qquad \text{et} \qquad S(x) = 0$$

D'après le théorème précédent on a alors

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad r_k = 0 \qquad \text{et} \qquad s_k = 0$$

D'où

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad a_k = r_k + is_k = 0$$

□

On peut alors résumer nos deux théorèmes

Corolaire 4

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, P est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Une conséquence importante est le théorème suivant

Théorème 5

L'écriture développée d'un polynôme est unique.
En d'autres termes, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{j=0}^{d} b_j X^j$ alors $n = d$ et

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad a_k = b_k$$

Remarque 2. Nous avons ici enfin la démonstration que deux polynômes sont égaux si leurs coefficients sont égaux.

Démonstration. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{j=0}^{d} b_j X^j$.

Si $P = Q$ alors $P - Q = \sum_{k=0}^{\max(n,d)} (a_k - b_k) X^k = 0$, où, par convention $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_j = 0$ si $j > d$ D'après les théorèmes précédents on a alors

$$\forall k \in [\![0, \max(n, d)]\!] a_k = b_k$$

□

C Degré d'un polynôme

1 Définition

Définition 3 (Degré d'un polynôme)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non-nul. (On posera $\deg(0) = -\infty$.)
On appelle degré de P, noté $\deg(P)$ le plus grand entier k tel que $a_k = 0$, c'est-à-dire

$$\deg(P) = \max\{k \in [\![0, n]\!] \ , \ a_k = 0\}$$

On appelle alors $a_{\deg(P)}$ le coefficient dominant de P et $a_{\deg P} X^{\deg(P)}$ le terme ou monôme dominant de P.
On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Un polynôme de coefficient dominant égal à 1 est dit unitaire.

2 Propriétés

Théorème 6

Soit P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On a alors

- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Démonstration. Les trois premiers points viennent des formes développées de $P+Q$, λP et $P \times Q$.

On pourrait donner une écriture développé de $P \circ Q$ pour prouver la dernière formule mais on va plutôt réinvestir notre connaissance des équivalents.

On a vu que $P(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} a_{\deg(P)} m^{\deg(P)}$ et que $Q(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} b_{\deg(Q)} n^{\deg(Q)}$.

Ainsi, pour $k \in [\![0, \deg(P)]\!]$ on a $Q(n)^k \underset{+\infty}{\sim} \left(b_{\deg(Q)} n^{\deg(Q)}\right)^k \underset{+\infty}{\sim} b_{\deg(Q)}^k n^{k \deg(Q)}$

On a, de plus, si $k < l$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{Q(n)^k}{Q(n)^l} = 0$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k Q(n)^k \underset{+\infty}{\sim} a_{\deg(P)} Q(n)^{\deg(P)} \underset{+\infty}{\sim} a_{\deg(P)} b_{\deg(Q)}^{\deg(P)} n^{\deg(Q) \times \deg(P)}$$

Ce qui nous montre que $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ et que le coefficient dominant de $P \circ Q$ est $a_{\deg(P)} b_{\deg(Q)}^{\deg(P)}$. □

D Polynôme dérivé

1 Définition

Définition 4 (Polynôme dérivé)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.
On appelle polynôme dérivé de P le polynôme, noté P' défini par

$$P' = \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1}$$

On appelle k-ième polynôme dérivée de P le polynôme noté $P^{(k)}$ défini par récurrence par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall k \in \mathbb{N} \qquad P^{(k+1)} = (P^{(k)})' \end{cases}$$

Remarque 3. Si P est à coefficients réels (et est donc une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors le polynôme dérivé P' coïncide avec la dérivée de la fonction polynomiale P.

Remarque 4. Si P est à coefficients complexes il n'y a (à notre niveau) aucun lien entre les fonctions polynomiales P et P'.

2 Propriétés

Proposition 7

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors

- $(\lambda P)' = \lambda P'$
- $(P+Q)' = P' + Q'$
- $(PQ)' = P'Q + PQ'$
- $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$

Si $n \in \mathbb{N}$ on a la formule de Leibniz **(Hors programme)** pour les polynôme

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Démonstration. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, on a alors

— $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$, d'où

$$(\lambda P)' = \sum_{k=1}^{n} k \lambda a_k X^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \lambda P'$$

— $P + Q = \sum_{k=0}^{max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$, d'où

$$(P+Q)' = \sum_{k=0}^{max(n,m)} k(a_k+b_k)X^{k-1} = \sum_{k=0}^{max(n,m)} ka_kX^{k-1}+kb_kX^{k-1} = \sum_{k=0}^{max(n,m)} ka_kX^{k-1}+\sum_{k=0}^{max(n,m)} kb_kX^{k-1} = P'+Q'$$

— On a $PQ = \sum_{k=0}^{n+d} c_k X^k$ où

$$\forall k \in [\![0, n+m]\!], \qquad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Ainsi $(PQ)' = \sum_{k=1}^{n+m} k c_k X^{k-1} = \sum_{i=0}^{n+m-1} (i+1) c_{i+1} X^i$
On a de plus

$$PQ' = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k b_k X^{k-1}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\left(\sum_{i=0}^{m-1} (i+1) b_{i+1} X^i\right) = \sum_{i=0}^{n+m-1} d_i X^i$$

où

$$\forall i \in [\![0, n+m-1]\!], \qquad d_i = \sum_{j=0}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1}$$

et

$$P'Q = \left(\sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_kX^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n}(i+1)a_{i+1}X^i\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_kX^k\right) = \sum_{i=0}^{n+m-1} e_iX^i$$

où

$$\forall i \in [\![0, n+m-1]\!], \qquad e_i = \sum_{j=0}^{k}(j+1)a_{j+1}b_{k-j}$$

Ainsi

$$P'Q + PQ' = \sum_{i=0}^{n+m-1}(d_i+e_i)X^i = \sum_{i=0}^{n+m-1} f_iX^i$$

où, pour $k \in [\![0, n+m-1]\!]$ on a

$$\begin{aligned}
f_k &= d_k + e_k \\
&= \sum_{j=0}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1} + \sum_{j=0}^{k}(j+1)a_{j+1}b_{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1} + \sum_{l=1}^{k+1} la_lb_{k-l+1} \qquad (l = j+1) \\
&= (k+1)a_0b_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1} + \sum_{j=1}^{k} ja_jb_{k-j+1} + (k+1)a_{k+1}b_0 \\
&= (k+1)a_0b_{k+1} + (k+1)a_{k+1}b_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1} + ja_jb_{k-j+1} \\
&= (k+1)a_0b_{k+1} + (k+1)a_{k+1}b_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j(k+1)b_{k-j+1} \\
&= (k+1)\sum_{j=0}^{k+1} a_jb_{k-j+1} \\
&= (k+1)c_{k+1}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$P'Q + PQ' = \sum_{i=0}^{n+m-1}(i+1)c_{i+1}X^i = (PQ)'$$

— La formule de $(P \circ Q)$ se prouve en commençant par le cas $Q = X$, puis le cas $Q = X^m$ avec $m \in \mathbb{N}$ puis en concluant par combinaison linéaire, on l'admettra ici.

— On procède par récurrence :
Initialisation : Si $n = 0$ on a

$$(PQ)^{(0)} = PQ = \binom{0}{0}P^{(0)}Q^{(0)} = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}P^{(k)}Q^{(0-k)}$$

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k)}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
(PQ)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(P^{(k)}Q^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(P^{(k+1)}Q^{(n-k)}+P^{(k)}Q^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(P^{(k+1)}Q^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}P^{(i)}Q^{(n+1-i)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k+1)} \\
&= \binom{n}{n}P^{(n+1)}Q^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}P^{(k)}Q^{(n+1-k)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k+1)}+\binom{n}{0}P^{(0)}Q^{(n+1)} \\
&= P^{(n+1)}Q^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)P^{(k)}Q^{(n+1-k)}+P^{(0)}Q^{(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{n+1}P^{(n+1)}Q^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}P^{(k)}Q^{(n+1-k)}+\binom{n+1}{0}P^{(0)}Q^{(n+1)} \\
&= +\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}P^{(k)}Q^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité au rang $n+1$ et achève la récurrence. □

3 Lien avec le degré

Théorème 8

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On a alors

$$\deg(P') = \deg(P) - 1$$

et, par suite, si $\deg(P) \geqslant k$

$$\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$$

Démonstration. Le premier point vient simplement de la définition de P' et le second en découle par récurrence. □

4 Formule de Taylor : hors programme.

Théorème 9 (Formule de Taylor-Mac Laurin)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n. Alors

$$P = \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$$

Remarque 5. On a une écriture très pratique des coefficients en fonction des dérivées. Ces résultats sont hors programmes mais extrêmement classiques.

Démonstration. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a alors

— $P(0) = a_0$

— $P' = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$, d'où $P'(0) = 1a_1$

— $P'' = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2}$, d'où $P''(0) = 2\times 1 a_2 = 2a_2$

— ...

— $P^{(i)} = \sum_{k=i}^{m} k(k-1)(k-2)\cdots(k-i+1)X^{k-i} = \sum_{k=i}^{m} \frac{k!}{(k-i)!}X^{k-i}$, d'où $P^{(i)}(0) = i!a_i$
— $\cdots$

On a donc

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

D'où le résultat voulu □

On peut généraliser ce résultat

Théorème 10 (Formule de Taylor)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k$$

Démonstration. Soit Q le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad Q(x) = P(x+\lambda)$$

C'est-à-dire $Q = P(X+\lambda)$.
On voit alors que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad Q^{(i)} = P^{(i)}(X+\lambda)$$

On a alors

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}X^k$$

D'où

$$P = Q(X-\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k$$

□

II Racines et factorisation

A Racine simple

1 Définition

Définition 5 (Racine d'un polynôme)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$.

2 Factorisation

Définition 6 (Factorisation par un polynôme)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non-constant et soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P se factorise par Q s'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = QR$.

Théorème 11 (factorisation et racine)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
P se factorise par $X-\lambda$ si et seulement si λ est une racine de P.

Démonstration. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Supposons que P se factorise par $X - a$, il existe alors R tel que $P = (X - a)R$, on a alors $P(a) = (a - a)R(a)$ d'où $P(a) = 0$.

Réciproquement supposons que $P(a) = 0$.

On rappelle la formule de factorisation vue au chapitre 3 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$

$$a^k - b^k = (a - b) \times \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} b^i$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} P(x) - P(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - \lambda^k\right) \\ &== \sum_{k=1}^{n} a_k \left(x^k - \lambda^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k (x - \lambda) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} x^i \\ &= (x - \lambda) \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} x^i \end{aligned}$$

Notons $Q_k = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} X^i \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = \sum_{k=1}^{n} a_k Q_k \in \mathbb{K}[X]$.

On a alors

$$P - P(a) = (X - a)Q$$

D'où $P = (X - a)Q$, P se factorise bien par $X - a$. □

Exemple 1. On a

—
$$P = 6X^3 + X^2 - 19X + 6 = (X + 2)(2X - 3)(3X - 1)$$

—
$$Q = X^4 - 6X^2 + 7X - 6 = (X - 2)(X + 3)(X^- X + 1) = (X - 2)(X + 3)\left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Théorème 12 (factorisation et racines)

Soit P un polynôme nul et soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ des racines distinctes de P. Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)Q$$

En particulier on a $k \leqslant \deg(P)$

Démonstration. D'après le théorème précédent, comme $P(\lambda_1) = 0$ alors il existe Q_1 tel que $P = (X - \lambda_1)Q_1$.

On a alors $P(\lambda_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)Q_1(\lambda_2) = 0$. Ainsi λ_2 est une racine de Q_1, on peut donc factoriser Q_1 par $X - \lambda_2$.

On en tire alors Q_2 tel que $Q_1 = (X - \lambda_2)Q_2$, d'où

$$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)Q_2$$

On répète ce procédé k fois de suite et on trouve Q tel que

$$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)Q$$

On a en particulier

$$\deg(P) = \deg\left((X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)\right) + \deg(Q) = k + \deg(Q) \geqslant k$$

□

B Racines multiples

1 Définition

On va préciser la définition d'une racine d'un polynôme

Définition 7 (Racine multiple)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une racine de P s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que
$$P = (X-\lambda)^m Q$$
avec $Q(\lambda) \neq 0$.
On appelle alors m l'ordre de multiplicité de λ ou simplement la multiplicité de λ.

Remarque 6. Si $m = 1$ on parle de racine simple, si $m = 2$ on parle de racine double, si $m = 3$ de racine triple, etc.

2 Multiplicité et dérivation

Théorème 13

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
P est factorisable par $(X-\lambda)^m$ si et seulement si
$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$$

Démonstration. — Supposons que P est factorisable par $(X-\lambda)^m$,, soit alors Q tel que $P = (X-a)^m Q$. D'après la formule de Leibniz on a, pour $k \in [\![0, m-1]\!]$
$$P^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-i)!}(X-\lambda)^{m-i} Q^{k-i}$$
D'où
$$P^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-i)!}(\lambda-\lambda)^{m-i} Q^{k-i}(\lambda) = 0$$
Réciproquement on va montrer par récurrence sur $m \geqslant 1$ que, si
$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$$
alors P se factorise par $(X-\lambda)^m$

<u>Initialisation</u>

Pour $m = 1$ cela correspond au théorème **??**

<u>Hérédité</u>

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m)}(\lambda) = 0$$
On a en particulier
$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$$
Ainsi, par hypothèse de récurrence, P se factorise par $(X-\lambda)^m$. Soit donc Q tel que $P = (X-\lambda)^m Q$.
D'après la formule de Leibniz on a alors
$$P^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{m!}{(m-k)!}(X-\lambda)^{m-k} Q^{(m-k)} = m!Q + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{m!}{(m-k)!}(X-\lambda)^{m-k} Q^{(m-k)}$$
Ainsi
$$0 = P^{(m)}(\lambda) = m!Q(\lambda) + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{m!}{(m-k)!}(\lambda-\lambda)^{m-k} Q^{(m-k)}(\lambda) = m!Q(\lambda)$$

On a donc $Q(\lambda) = 0$, Q se factorise ainsi par $X - \alpha$. Soit R tel que $Q = (X - \alpha)R$. On en tire alors

$$P = (X - \lambda)^m Q = (X - \lambda)^{m+1} R$$

P se factorise donc bien par $(X - \lambda)^{m+1}$ ce qui prouve la propriété au rang $m + 1$ et achève la récurrence.

On aurait aussi pu utiliser la formule de Taylor en λ pour arriver rapidement au résultat (mais le résultat est hors-programme).

□

Corolaire 14

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
λ est une racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(m)}(\lambda) \neq 0$$

C Existence de racine

1 Dans $\mathbb{C}[X]$

Existe-t-il toujours des racines à un polynôme ? Il s'agit d'une question qui a intéressé les mathématiciens pendant longtemps à laquelle il a fallu plusieurs siècles pour avoir une réponse complète

Théorème 15 (de D'Alembert Gauss)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ (remarquons que $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$). Alors P admet au moins un racine dans $\mathbb{C}$.

Remarque 7.
- On appelle aussi parfois ce théorème le théorème fondamental de l'algèbre (bien que la plupart de ses preuves soient analytiques)
- Ce théorème a été énoncé pour la première fois sous cette forme par Jean Le Rond D'Alembert en 1746, Albert Girard en avait eu la première intuition en 1629 mais ne disposait pas des nombres complexes. Il a fallu attendre le 19e siècle pour voir apparaître des preuves complètes, d'abord par Jean Robert Argand en 1814, puis par Gauss en 1815,1816 et 1849.
- Ce résultat est non constructif, il nous assure de l'existence d'une racine mais ne nous donne pas de moyen de la trouver. On connait des méthodes pour les polynômes de degré 1, 2, 3 (méthode de Cardan) et 4 (méthode de Ferrari) et Niels Abel a prouve qu'il n'existait pas de méthode générale pour les degrés supérieurs ou égaux à 5.

Démonstration. Il est bien évident que l'on admet ce résultat □

Corolaire 16

Tout polynôme de degré n à coefficients complexes peut s'écrire comme le produit de n polynôme du premier degré.

Démonstration. □

Théorème 17

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n. P admet alors exactement n racines complexes comptées avec multiplicité

Remarque 8. Les polynômes réels étant des cas particuliers des polynômes complexes ce résultat s'applique également à eux.

2 Dans $\mathbb{R}[X]$

Le cas des polynômes réels est un peu plus compliqué, si l'on sait qu'ils ont des racines complexes, rien ne nous assure qu'ils ont des racines réelles. On peut toutefois obtenir quelques résultats

Proposition 18

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité m. Alors $\bar{\lambda}$ est également une racine de P de multiplicité m.

Démonstration. On a

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(m)}(\lambda) \neq 0$$

Or, pour $k \in [\![0, m]\!]$ et $x \in \mathbb{C}$on a

$$P(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{x}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{x^k} = \sum_{k=0}^{n} \bar{a_k} \bar{x^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k} = \overline{P(x)}$$

On a ainsi

$$P(\bar{\lambda}) = P'(\bar{\lambda}) = \cdots = P^{(m-1)}(\bar{\lambda}) = \bar{0} = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(m)}(\bar{\lambda}) = \overline{P^{(m)}}(\lambda) \neq 0$$

$\bar{\lambda}$ est donc bien une racine de P de multiplicité m. □

Corolaire 19

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Alors P admet au moins une racine réelle.

Démonstration. Les résultats précédents nous assurent que

— P admet $\deg(P)$ racines comptées avec multiplicité.

— P admet un nombre pair de racines complexes non réelles

Ceci implique que P admet forcément une racine réelle. □

Théorème 20

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n. Si P s'annule en $n+1$ points distincts alors P est le polynôme nul.

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n et soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ $n+1$ points d'annulation de P.

Alors on ne considère que les n premiers, on peut factoriser P par $(X - \lambda_1)$, $(X - \lambda_2)$, etc, soit

$$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n)K$$

où K est un polynôme de degré $n - n = 0$ donc une constante.

Alors, en évaluant cette expression en λ_{n+1} on obtient

$$0 = P(\lambda_{n+1}) = K(\lambda_{n+1} - \lambda_1)(\lambda_{n+1} - \lambda_2) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

Les $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ sont deux à deux distincts, on a ainsi

$$(\lambda_{n+1} - \lambda_1)(\lambda_{n+1} - \lambda_2) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \neq 0$$

D'où $K = 0$ et, par suite

$$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n)K = 0$$

□

Exemple 2.

— Factoriser $P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16$ par $(X - 2)$ autant de fois que possible

— Factoriser $Q = X^5 + 6X^4 + 11X^3 + 11X^2 + 6X + 1$ par $(X + 1 =$ autant de fois que possible

— Factoriser $R = X^4 + 4X^3 - 8X^2 + 4X - 1$ par $(X - 2)$ autant de fois que possible