Chapitre 17 : probabilités.

I Expériences aléatoires, Événements

A Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prédire l'issue de manière certaine, par exemple en raison du libre arbitre des participants à l'expérience (e.g. élection) ou bien par manque d'information (ce qui est souvent le cas en en physique ou en biologie, on ne dispose pas d'informations sur tous les paramètres et la plupart des informations ont une marge d'erreur). Il y alors un certain nombre d'issues à envisager.

Définition 1

On appelle univers, généralement noté Ω l'ensemble des résultats possibles d'un expérience aléatoire. Un élément de Ω est appelé une issue ou une éventualité et est généralement noté ω

Exemple 1.
- Lancer d'un pièce, $\Omega = \{Pile, Face\}$
- Lancer d'un dé standard à 6 faces, $\Omega = [\![1, 6]\!]$
- Élection présidentielle Ω est l'ensemble des candidats
- Tirer une carte dans un jeu de 32 cartes, Ω est l'ensemble des cartes du paquet
- Instant de la mort du prof de maths $\Omega = [t, +\infty[$ où t est l'instant présent
- Nombre de lancers nécessaires avant qu'un pièce ne s'arrête sur la tranche, $\Omega = \mathbb{N}$

Remarque 1. En première année on se limitera généralement à des univers finis

B Événements

Un événement E est une caractéristique de l'expérience qui est réalisée ou non.

Définition 2

On appelle événement toute sous-partie A de Ω, autrement dit tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.
L'événement A est dit être réalisé si l'issue effective ω de l'expérience appartient à A, on dit également que l'issue ω est favorable.
L'ensemble des événements possibles est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 3

Vocabulaire

- L'événement Ω est dit certain (il est toujours réalisé)
- L'événement $\varnothing$ est dit impossible
- Un événement ne contenant qu'une seule issue, i.e. un singleton $\{\omega\}$ est dit élémentaire
- Soit A et B deux événements, si $A \subset B$ on dit alors que A implique B, en effet, si $\omega \in A$ alors $\omega \in B$.

Exemple 2.
- On lance un dé standard à 6 faces, on a alors $\Omega = [\![1, 6]\!]$, l'événement « le résultat est pair »est alors $P = \{2, 4, 6\}$
- On s'intéresse à l'instant de la mort du prof de maths, on a alors $\Omega = [t, +\infty[$ où t est l'instant présent, l'événement « Il va falloir un remplaçant »est $[t, f]$ où f est le 27 juin 2019 à 18h

C Opérations sur les événements

Définition 4

Soit A et B deux événements

- $\bar{A} = A^c = \Omega \backslash A$ est appelé événement contraire de A ou encore « non A »
- $A \cup B$ est appelé réunion de A et B ou encore « A ou B »
- $A \cap B$ est appelé intersection de A et B ou encore « A et B »
  Lorsque $A \cap B = \varnothing$ on dit que A et B sont incompatibles

Proposition 1

Rappels Soit A, B et C trois événements, on rappelle les propriétés suivantes

- Lois de Morgan
$$\bar{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \bar{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
- L'intersection et l'union sont commutatives
$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$
- L'intersection et l'union sont associatives
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$
- L'intersection et l'union sont distributives l'une par rapport à l'autre
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
-
$$A \cup \varnothing = A \quad A \cap \varnothing = \varnothing \quad A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A$$

Définition 5

On appelle système complet d'événements toute famille $(A_1, \cdots, A_n)$ d'événements tels que

- Les $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont deux-à-deux incompatibles, i.e.
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Remarque 2. On dit aussi que les $(A_1, \cdots, A_n)$ forment une partition de Ω

Exemple 3.

- On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. La famille
$$\{Pique\ ,\ Coeur\ ,\ Trèfle\ ,\ Carreau\{$$
est un système complet d'événements
- On tire un nombre au hasard entre 0 et 20, la famille
$$\{\{3k\ ,\ k \in [\![0,6]\!]\},\ \{3k+1\ ,\ k \in [\![0,6]\!]\},\ \{3k+2\ ,\ k \in [\![0,6]\!]\}\}$$
est un système complet d'événements

Proposition 2

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. La famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements

II Probabilité

A Sur la modélisation

Le calcul des probabilités est un concept purement théorique mais qui répond à des nécessités issues de la modélisation de problèmes concrets, c'est-à-dire de leur transformation/simplification en des problèmes mathématiques abstraits mais résolubles.

C'est cette étape de modélisation qui donne un sens précis aux questions de probabilités, sans cela les questions du type « Quelle chance a tel ou tel événement de se produire »ne sont pas bien définies. Pratiquement toute la physique moderne est une modélisation, un cadre mathématique censé approximer le réel et permettant de faire des prévisions.

Modéliser consiste souvent à simplifier pour rendre le problème traitable, par exemple en négligeant l'influence de certains paramètres. Savoir ce qui est important et ce qui peut être négligé est du ressort du scientifique et c'est souvent là toute la difficulté de la modélisation. Il va souvent y avoir un aller-retour dans la construction d'un modèle pour déterminer s'il est pertinent ou non et l'adapter au problème étudié et au but de l'étude.

Il convient toujours de s'interroger sur les modèles que l'on utilise : « Le modèle reflète-t-il fidèlement la réalité ? »« Peut-il être exploité pour obtenir des informations utiles »

Pour finir deux citations à méditer sur la modélisation :

« *All models are wrong but some are useful* »Georges Box

« *Truth is much too complicated to allow anything but approximations* »John Von Neumann

B Définitions et premières propriétés

Définition 6

On appelle probabilité sur Ω toute application

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{P} & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & A & \mapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

vérifiant les axiomes suivants

— Axiome d'additivité

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \text{ tel que } A \cap B = \varnothing \qquad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Proposition 3

Soit A et B deux événements

— $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

— $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

— Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

— $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

— $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

— Si $A_1, \cdots, A_n$ sont des événements deux-à-deux incompatibles alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

— Soit $A_1, \cdots, A_n$ n événements (pas forcément incompatibles), alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque 3. Toutes ces propriétés sont à maitriser sur le bout des doigts

Remarque 4. Il existe une formule dite formule du crible qui généralise la formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ mais elle n'est pas au programme

Démonstration. — On a $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, ainsi

$$\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing \cup \varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing)$$

et donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

— On a $A \cap \bar{A} = \varnothing$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$, d'où

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$$

D'où $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

— Si $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \backslash A)$ et $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$, d'où

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A) \geqslant \mathbb{P}(A)$$

— On a

$$A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$$

De plus $A \cap (B \cap \bar{A}) = A \cap \bar{A} \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing$.
Ainsi

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$$

Par ailleurs on a $B = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)$ et $(B \cap \bar{A}) \cap (A \cap B) = \varnothing$, d'où

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

On en déduit alors que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

— Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$ on a alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

— On va procéder par récurrence.
Initalisation :
Le cas $n = 2$ a déjà été prouvé.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose la propriété vérifiée au rang n.
Soit $A_1, \cdots, A_n, A_{n+1}$ des événements deux-à-deux incompatibles. On a

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} \varnothing = \varnothing$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)\end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

— On procède par récurrence tout comme le point précédent.

□

Remarque 5. — La probabilité d'un événement est toujours un nombre réel compris entre 0 et 1. On exprime parfois les probabilités en pourcentage. À toute fin utile on rappelle que $x\% = \frac{x}{100}$

— Utilisez votre bon sens pour vérifier la vraisemblabilité de vos résultats. Rien ne crie plus votre incompréhension des probabilités à un correcteur qu'une phrase du type « L'événement A arrive avec une probabilité de 2.3 »

Remarque 6. Un probabiliste n'est pas un footballeur, il ne donne jamais plus de 100%

C Définition d'une probabilité par les événements élémentaires

Théorème 4

Soit Ω un univers fini, $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ et soit $(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
- $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad p_i \in [0, 1]$
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Il existe alors une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$$

De plus, pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \text{ t.q. } \omega_i \in A} p_i$$

Démonstration. Soit $\mathbb{P}$ l'application définie par

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{P} & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & & A & \mapsto & \sum_{i \text{ t.q. } \omega_i \in A} p_i \end{array}$$

On va montrer que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur Ω et vérifie la condition demandée

On a $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$, ainsi

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \omega_i \in \Omega$$

D'où

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i \text{ t.q. } \omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Soit $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$ tels que $A \cap B = \varnothing$, ainsi si $\omega_i \in A$ alors $\omega_i \notin B$ (sinon on aurait $\omega_i \in A \cap B = \varnothing$)

Ainsi

$$\{i \text{ t.q. } \omega_i \in A \cap B\} = \{i \text{ t.q. } \omega_i \in A\} \cap \{i \text{ t.q. } \omega_i \in B\}$$

et

$$\{i \text{ t.q. } \omega_i \in A\} \cap \{i \text{ t.q. } \omega_i \in B\} = \varnothing$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \sum_{i \text{ t.q. } \omega_i \in A \cup B} p_i \\ &= \sum_{i \text{ t.q. } \omega_i \in A} p_i + \sum_{i \text{ t.q. } \omega_i \in B} p_i \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

$\mathbb{P}$ est donc bien une probabilité, de plus on a, pour $j [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\{\omega_j\}) = \sum_{i \text{ t.q. } \omega_i \in \{\omega_j\}} p_i = p_j$$

$\mathbb{P}$ vérifie bien la condition demandée

Vérifions maintenant l'unicité. Soit $\tilde{\mathbb{P}}$ une autre probabilité vérifiant la condition voulue. Soit $A \subset \Omega$, on a alors

$$A = \bigcup_{i \text{ t.q. } \omega_i \in A} \{\omega_i\}$$

et les $(\omega_i\})_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont deux-à-deux disjoints, d'où

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcup_{i \text{ t.q. } \omega_i \in A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \text{ t.q. } \omega_i \in A} \tilde{\mathbb{P}}(\{\omega_i\}) = \sum_{i \text{ t.q. } \omega_i \in A} p_i = \mathbb{P}(A)$$

Ce qui prouve que $\mathbb{P} = \tilde{\mathbb{P}}$. $\square$

Remarque 7. On définira souvent un modèle probabiliste en fixant la probabilité de chaque événement élémentaire

Définition 7

Probabilité uniforme Soit Ω un univers fini. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que
$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$
On appelle cette probabilité la probabilité uniforme sur Ω.

Remarque 8.
— La probabilité uniforme intervient dans des situations dites d'équiprobabilité, i.e. toutes les issues ont la même probabilité
— On fera attention au vocabulaire utilisé : choisir au hasard ne signifie rien tant que l'on n'a pas précisé la loi du tirage. Pour désigner l'acception courante de « tirer au hasard »où toutes les issues sont équiprobables, on tira « tirer uniformément au hasard ».
— Les concepteurs de sujets sont généralement attentifs à ce point mais s'il est juste écrit « tirer au hasard »il faudra le plus souvent comprendre « tirer uniformément au hasard »

Proposition 5

Soit Ω un univers fini et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω, on a alors
$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$
Ainsi, dans les situations d'équiprobabilités, les problèmes de probabilité se ramènent à des problèmes de dénombrement

Remarque 9. Cette formule se résume souvent par « Nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles »

Théorème 6

Formule des probabilités totales (version 1) Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements. Soit B un événement et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. On a alors
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Remarque 10. On utilisera en général une autre version de la formule de probabilités totales qui viendra plus tard

Démonstration. On a
$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i) \end{aligned}$$
Ainsi, d'après le caractère additif des probabilités
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$
□

III Conditionnement

A Définition

En physique ou en biologie on va modéliser certains phénomènes difficilement prédictives par des expériences aléatoires. On va ensuite utiliser nos connaissances mathématiques pour relier ces phénomènes entre eux et essayer de faire des prédictions. La notion de probabilité conditionnelle va alors permettre, dans une certaine mesure, de rendre compte de l'information apportée par la réalisation d'un événement sur la réalisation éventuelle d'un autre événement.

Définition 8

Soit Ω un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On définit la probabilité de A sachant B notée $\mathbb{P}(A|B)$ par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Remarque 11. On trouve aussi la notation $\mathbb{P}_B(A)$

Théorème 7

Soit Ω un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
$\mathbb{P}_B$ est alors une probabilité sur Ω

Démonstration. Il suffit de vérifier les deux axiomes d'une probabilité.
On a

$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

Soit A et A' deux événements incompatibles. Alors $(A \cap B) \cap (A' \cap B) = A \cap A' \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing$
Ainsi

$$\mathbb{P}\left((A \cap B) \cup (A' \cap B)\right) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A' \cap B)$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_B(A \cup A') &= \frac{\mathbb{P}\left((A \cup A') \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left((A \cap B) \cup (A' \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A' \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A')
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}_B$ est donc bien une probabilité sur Ω □

Remarque 12. — $A|B$ n'est qu'une notation, il n'existe pas d'événement « A sachant B »
— Lorsque vous établissez des arbres de probabilités pour représenter des événements successifs le poids de la branche liant un événement E à un événement subséquent F est $\mathbb{P}(F|E)$.

Proposition 8

Soit Ω un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$$

Démonstration. C'est une conséquence évidente de la définition des probabilités conditionnelles □

B Formules de Bayes, des probabilités composées, des probabilités totales

Théorème 9

Formule de Bayes Soit Ω un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(B|A)$$

Démonstration. La preuve est très simple

$$\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

D'où

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(B|A)$$

□

Cette formule est extrêmement utile dans des situations de tests

Exemple 4. Une entreprise pharmaceutique a conçu un test de grossesse avec les caractéristiques suivantes

— Une femme enceinte a un test positif avec une probabilité 0.95

— Une femme non-enceinte a un test positif avec une probabilité 0.04

On estime qu'à chaque instant environ 2% des femmes sont enceintes.

Quelle est la probabilité qu'une femme ayant obtenu un test positif soit enceinte ?

Notons E l'événement « La femme est enceinte »et T l'événement « La femme a obtenu un test positif ». On a alors

$$\mathbb{P}(T|E) = 0.95, \qquad \mathbb{P}(T|\bar{E}) = 0.04, \qquad \mathbb{P}(E) = 0.02$$

La famille $(E, \bar{E})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(T \cap E) + \mathbb{P}(T \cap \bar{E})\\ &= \mathbb{P}(T|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(T|\bar{E})\mathbb{P}(\bar{E})\\ &= 0.95 \times 0.02 + 0.04 \times 0.98\\ &= 0.0582\end{aligned}$$

D'après la formule de Bayes on a alors

$$\mathbb{P}(E|T) = \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(T)}\mathbb{P}(T|E) = \frac{0.02}{0.0582} \times 0.95 \simeq 0.33$$

Ainsi une personne qui a un test positif n'a qu'une chance sur 3 d'être réellement enceinte.

Vous pensez que cela signifie que ce test est mauvais ? Vous avez complètement tort. Lorsque l'on conçoit un test il est mathématiquement impossible de minimiser simultanément la probabilité d'obtenir un faux positif (qu'une personne obtienne un test positif à tort) et la probabilité d'obtenir un vrai négatif (qu'une personne n'obtienne pas un test positif alors qu'elle le devrait). En statistique on parle d'erreur de première et de seconde espèce.

Quand on conçoit un test il faut alors bien définir son objectif. Le but de ce test est de ne rater qu'une très petit nombre de grossesses. Les femmes qui ont un test positif vont alors effectuer un autre test (souvent plus cher) dont la finalité est de s'assurer qu'elles sont réellement enceintes

Théorème 10 (Formule des probabilités composées)

Soit $(A_1, \cdots, A_n)$ n événements. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1})$$

Remarque 13. C'est cette formule qui justifie le travail que vous faisiez en Terminale sur les arbres en affirmant que la probabilité d'une branche est égale au produit des probabilités des éléments de la branche

Démonstration. Il s'agit d'une simple récurrence □

Théorème 11

Formule des probabilités totales (version 2) Soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements. Soit B un événement et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. On a alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

IV Indépendance

A Indépendance de deux événements

Définition 9

Deux événements A et B sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque 14. On abrège cela parfois par $A \perp B$

Proposition 12

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

Remarque 15. — Ceci s'interprète comme « La connaissance de la réalisation ou non B ne donne aucune information sur celle de A »

— En pratique l'indépendance d'événements sera souvent donnée comme hypothèse dans la modélisation.

— Attention, la notion d'indépendance ne se transpose pas bien vis à vis des probabilités conditionnelles, on peut avoir A et B deux événements indépendants et C un autre événement de probabilité non-nulle mais

$$\mathbb{P}(A \cap B|C) \neq \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C)$$

Proposition 13

Soit A et B deux événements indépendants, alors

— A et $\bar{B}$ sont indépendants

— $\bar{A}$ et B sont indépendants

— $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

Démonstration. C'est une conséquence simple des propriétés de base sur les probabilités □

Définition 10

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. On dit que les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux indépendants si

$$\forall (i,j) \in I^2, \qquad i \neq j \quad \Rightarrow \quad A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants}$$

B Indépendance mutuelle de n événements

Définition 11

Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n événements.
On dit que les événements $(A_1, \cdots, A_n)$ sont mutuellement indépendants si

$$\forall J \subset [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in J} A_k\right) = \prod_{k\in J} \mathbb{P}(A_k)$$

Remarque 16. Attention à ne pas confondre indépendance deux à deux et indépendance mutuelle. Une famille d'événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse

Exemple 5. On lance de manière indépendante deux pièces, on définit les événements suivants :

- A : « La première pièce fait pile »
- B : « La seconde pièce fait pile »
- C : « Les deux pièces ont des résultats différents »

Les événements A et B et C sont deux à deux indépendants, en effet

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Mais les événements A et B et C ne sont pas mutuellement indépendants puisque

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$