Chapitre 18 : Suites (suite).

I Généralités sur les suites

Définition 1

On appelle suite de nombres réels ou suite réelle toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Si u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ on la notera alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou bien $(u_n)_{n\geqslant 0}$ où, par convention, $u_n = u(n)$.
On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général u_n.
On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Remarque 1. — On parlera toujours de la suite u ou de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais pas de la suite u_n.
— De manière analogue, pour $p \in \mathbb{N}$ on appellera encore suite une application u de $[\![p, +\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$ et on la notera $(u_n)_{n\geqslant p}$.
— Le choix de la lettre pour l'indice n'a pas d'importance, on peut écrire $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Exemple 1. — La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 3n + 1$$

— La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = 0$$

est appelée la suite nulle.
— Une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = w_0$$

est appelée une suite constante

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit alors
— la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \lambda u_n$$

On la note $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
— la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n = u_n + v_n$$

On la note $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
— la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = u_n \times v_n$$

On la note $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
— si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule jamais, on définit la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d_n = \frac{u_n}{v_n}$$

On la note $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. On dit que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est <u>vraie à partir d'un certain rang</u> s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
C'est-à-dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}$$

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle

— On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>stationnaire</u> si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad a_n = a_{n_0}$$

— On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>périodique de période $p \in \mathbb{N}$</u> si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+p} = u_n$$

Exemple 2. — La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (-1)^n$$

est périodique de période 2.

— La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \left\lfloor \frac{10}{n} \right\rfloor$$

est stationnaire.

Définition 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle

— On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. strictement croissante) si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \geqslant u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} > u_n)$$

— On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang (resp. strictement croissante à partir d'un certain rang) si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geqslant n_0 \qquad u_{n+1} \geqslant u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} > u_n)$$

— On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. strictement croissante) si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \leqslant u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} < u_n)$$

— On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang (resp. strictement croissante à partir d'un certain rang) si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geqslant n_0 \qquad u_{n+1} \leqslant u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} < u_n)$$

— On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou bien si elle est décroissante (resp. si elle est strictement croissante ou bien si elle est strictement décroissante).

Remarque 2. Sous peine de risque de fâcher gravement le correcteur on n'écrira jamais « $u_n \nearrow$ »ou « $u_n \searrow$ »sur sa copie.

Exemple 3. — La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = n^2 + 1$$

est strictement croissante

— La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

est croissante (mais pas strictement croissante).

— Soit $q > 0$ et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = nq^n$$

Quelle est la monotonie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Si $q \geqslant 1$ il est clair que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On suppose que $q < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a clairement $a_n \neq 0$. Pour étudier l'éventuelle monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on va étudier le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
&a_n \leqslant a_{n+1}\\
\Leftrightarrow &\frac{a_n+1}{a_n} \geqslant 1\\
\Leftrightarrow &\frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n} \geqslant 1\\
\Leftrightarrow &\frac{(n+1)}{n} \geqslant 1\\
\Leftrightarrow &1+\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{q}\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{q}-1\\
\Leftrightarrow &n \geqslant \frac{q}{1-q} \qquad \left(\text{on a } \frac{1}{q} > 1\right)
\end{aligned}$$

De même on montre que

$$a_{n+1} \leqslant a_n \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{q}{1-q}$$

Ainsi, si $q < 1$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang $n_0 = \left\lfloor \frac{q}{1-q} \right\rfloor + 1$.

— Soit $x > 0$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n = \frac{x^n}{n!}$$

Étudions la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!}\\
&= \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} - 1\right)\\
&= \frac{x^n}{(n+1)!}\left(x-(n+1)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang $n_0 = \lfloor x \rfloor$.

Définition 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On parle alors de suite récurrente d'ordre 1.

On peut généraliser cette notion au cas où l'ensemble de définition D_f de f n'est pas $\mathbb{R}$ mais il est alors extrêmement important de vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie en prouvant (généralement par récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,$u_n \in D_f$.

Exemple 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0,2] \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2-u_n} \end{cases}$$

Comme $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, on $\boxed{\text{DOIT}}$ montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Pour cela on va ici montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0,2]$.

Initialisation :

On a par définition $u_0 \in [0,2]$ (ce qui nous assure que $u_1 = \sqrt{2-u_0}$ est bien défini).

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que, pour tout $k \leqslant n$, u_k est bien défini et vérifie $u_k \in [0,2]$.

On va montrer qu'alors u_{n+1} est bien défini et vérifie $u_{n+1} \in [0,2]$.

Comme $u_n \in [0,2] \subset D_f$ alors $u_n n+1 = f(u_n)$ est bien défini. De plus, comme $u_n \in [0,2]$ on a alors

$$\sqrt{2-0} \geqslant \sqrt{2-u_n} \geqslant \sqrt{2-2}$$

C'est-à-dire

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2$$

Ainsi $u_{n+1} \in [0,2]$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

On a ainsi prouvé que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

On peut généraliser la notion de suite définie par récurrence.

Définition 7

Soit $p \in \mathbb{N}^*$,$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$. Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = x_0 \quad u_1 = x_1 \quad \cdots \quad u_{p-1} = x_{p-1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = f(u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+p-1})$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_1 = x_1 \\ \vdots \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = f(u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+p-1}) \end{cases}$$

On parle alors de suite récurrente d'ordre p.

II Suites usuelles

A Suite arithmétiques et géométriques

Définition 8

Soit $r \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r.

Théorème 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + nr$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n.

Initialisation :

On a bien $u_0 = u_0 + 0 \times r$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n = u_0 + nr$.

Alors

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. □

Théorème 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et soit $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = (N+1)u_0 + \frac{N(N+1)}{2}r$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} u_k &= \sum_{k=0}^{N} u_0 + rk \\ &= (N+1)u_0 + r\sum_{k=0}^{N} k \\ &= (N+1)u_0 + \frac{N(N+1)}{2}r\end{aligned}$$

□

Définition 9

Soit $q \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q.

Théorème 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 q^n$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n.

Initialisation :

On a bien $u_0 = u_0 \times 1 = u_0 \times q^0$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n = u_0 q^n$.

Alors

$$u_{n+1} = qu_n = qu_0q^n = u_0q^{n+1}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. □

Théorème 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et soit $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \begin{cases} u_0\frac{1-q^{N+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (N+1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} u_k &= \sum_{k=0}^{N} u_0 q^k \\ &= u_0 \sum_{k=0}^{N} q^k \\ &= \begin{cases} u_0 \frac{1-q^{N+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (N+1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

□

B Suites arithmético-géométriques

Définition 10

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

Théorème 5

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmético-géométrique définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

On suppose que $a \neq 0$ Soit c l'unique solution de l'équation $x = ax + b$.
Alors la suite $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a et on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = c + a^n (u_0 - c)$$

Remarque 3. Si $a = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement une suite arithmétique

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ c = ac + b \end{cases}$$

En soustrayant la seconde ligne à la première on a alors

$$u_{n+1} - c = a(u_n - c)$$

La suite $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien géométrique de raison a.
On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} u_n - c = a^n(u_0 - c)$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = c + a^n (u_0 - c)$$

□

Exemple 5. Alice a payé avec une carte de crédit une somme de 1000 euros. Sa banque pratique un taux d'intérêt de 5% sur la somme restant due. Alice souhaite rembourser sa dette au rythme de 100 euros par mois à partir du second mois. Combien de temps faudra-t-il à Alice pour rembourser sa dette et combien aura-t-elle payé au total ?

La dette d'Alice au mois n notée d_n est une suite arithmético-géométrique vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d_{n+1} = 1.05 d_n - 100$$

Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $c = 1.05c - 100$ c'est-à-dire $c = \frac{100}{0.05} = 2000$.

On a alors
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d_n = 2000 - 1000 \times 1.05^n$$

Alice aura remboursé sa dette lorsque que $u_n \leqslant 0$, c'est-à-dire dès que $(1.05)^n \geqslant 2$ donc dès que $n \geqslant \frac{\ln(2)}{\ln(1.05)} \simeq 14$.

Il faut donc 15 mois à Alice pour payer sa dette et elle aura payé au total

$$13 \times 100 + d_{14} = 1400 + 2000 - 1000 \times 1.05^{14} \simeq 1420$$

C Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 11

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Théorème 6

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

Soit $P = X^2 - aX - b$. On dit que P est le polynôme caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Trois cas sont possibles

— P admet deux racines réelles distinctes λ et μ. Alors, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = A\lambda^n + B\mu^n$$
Le couple (A,B) est de plus l'unique solution du système
$$\begin{cases} A + B = u_0 \\ \lambda A + \mu B = u_1 \end{cases}$$

— P admet une racine réelle double λ. Alors il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ te lque
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = A\lambda^n + Bn\lambda^n$$
Le couple (A,B) est de plus l'unique solution du système
$$\begin{cases} A = u_0 \\ \lambda(A + B) = u_1 \end{cases}$$

— P admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. Alors, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \rho^n \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)$$
Le couple (A,B) est de plus l'unique solution du système
$$\begin{cases} A = u_0 \\ \rho(A\cos(\theta) + B\sin(\theta)) = u_1 \end{cases}$$

Remarque 4. Il faut bien faire attention, la méthode est similaire à celle employée pour les équations différentielles mais la forme des résultats n'est pas la même

Démonstration. On admet que les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues introduit ont toujours une unique solution.

On va procéder par récurrence double

— P admet deux racines réelles distinctes λ et μ. On a donc

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \qquad \text{et} \qquad \mu^2 - a\mu - b = 0$$

Initialisation :
On a bien $u_0 = A\lambda^0 + B\mu^0$ et $u_1 = A\lambda^1 + B\mu^1$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que

$$u_n = A\lambda^n + B\mu^n \qquad \text{et } u_{n-1} = A\lambda^{n-1} + B\mu^{n-1}$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + bu_{n-1} \\ &= a\left(A\lambda^n + B\mu^n\right) + b\left(A\lambda^{n-1} + B\mu^{n-1}\right) \\ &= A\lambda^{n-1}\left(a\lambda + b\right) + B\mu^{n-1}\left(a\mu + b\right) \\ &= A\lambda^{n-1}\lambda^2 + B\mu^{n-1}\mu^2 \\ &= A\lambda^{n+1} + B\mu^{n+1} \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ est achève la récurrence.

— P admet une racine réelle double λ. On a alors

$$P = X^2 - aX - b = X^2 - 2\lambda X + \lambda^2$$

En particulier $a = 2\lambda$.
Initialisation :
On a bien $u_0 = A\lambda^0 + B \times 0 \times \lambda^0$ et $u_1 = A\lambda^1 + B \times 1 \times \lambda^1$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que

$$u_n = A\lambda^n + Bn\lambda^n \qquad \text{et } u_{n-1} = A\lambda^{n-1} + B(n-1)\lambda^{n-1}$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + bu_{n-1} \\ &= a\left(A\lambda^n + Bn\lambda^n\right) + b\left(A\lambda^{n-1} + B(n-1)\lambda^{n-1}\right) \\ &= A\lambda^{n-1}\left(a\lambda + b\right) + B(n-1)\lambda^{n-1}\left(a\mu + b\right) + aB\lambda^n \\ &= A\lambda^{n-1}\lambda^2 + B(n-1)\lambda^{n-1}\lambda^2 + 2\lambda B\lambda^n \\ &= A\lambda^{n+1} + B(n+1)\lambda^{n+1} \end{aligned}$$

— P admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$.
Initialisation :
On a bien

$$u_0 = \rho^0\left(A\cos(0\times\theta) + B\sin(0\times\theta)\right) \qquad \text{et} \qquad u_1 = \rho^1\left(A\cos(1\theta) + B\sin(1\theta)\right)$$

Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que

$$u_n = \rho^n\left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right) \qquad \text{et} \qquad \rho^(n-1)\left(A\cos((n-1)\theta) + B\sin((n-1)\theta)\right)$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + bu_{n-1} \\ &= a\left(\rho^n\left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)\right) + b\left(\rho^(n-1)\left(A\cos((n-1)\theta) + B\sin((n-1)\theta)\right)\right) \\ &= A\left(a\rho^n\cos(n\theta) + b\rho^{n-1}\cos((n-1)\theta)\right) + B\left(a\rho^n\sin(n\theta) + b\rho^{n-1}\sin((n-1)\theta)\right) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} a\rho^n\cos(n\theta) + b\rho^{n-1}\cos((n-1)\theta) &= \Re\left(a\left(\rho e^{i\theta}\right)^n + b\left(\rho e^{i\theta}\right)^{n-1}\right) \\ &= \Re\left(\left(\rho e^{i\theta}\right)^{n-1}\left(a\rho e^{i\theta} + b\right)\right) \\ &= \Re\left(\left(\rho e^{i\theta}\right)^{n-1}\left(\rho e^{i\theta}\right)^2\right) \\ &= \rho^{n+1}\cos((n+1)\theta) \end{aligned}$$

De même

$$a\rho^n \sin(n\theta) + b\rho^{n-1}\sin((n-1)\theta) = \rho^{n+1}\sin((n+1)\theta)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= A\left(a\rho^n\cos(n\theta) + b\rho^{n-1}\cos((n-1)\theta)\right) + B\left(a\rho^n\sin(n\theta) + b\rho^{n-1}\sin((n-1)\theta)\right) \\ &= A\rho^{n+1}\cos((n+1)\theta) + B\rho^{n+1}\sin((n+1)\theta) \\ &= \rho^{n+1}\left(A\cos((n+1)\theta) + B\sin((n+1)\theta)\right) \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

□

Exemple 6. la suite de Fibonacci est une suite célèbre introduite par Léonardo Fibonacci, pour répondre à la question suivante : « Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

Ce problème mène à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

Le polynôme $X^2 - X - 1$ admet deux racines réelles $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Ainsi il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

On a alors

$$\begin{cases} A + B & = 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}A + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B & = 1 \end{cases}$$

D'où

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{et} \qquad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

III Convergence des suites réelles

A Généralités

Définition 12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou est convergente si

$$\exists L \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant p, \quad |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

C'est-à-dire s'il existe une réel L tel que, pour tout réel strictement positif ε, tous les termes de la suite sont dans $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ à partir d'un certain rang.
On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L ou tend vers L quand n tend vers $+\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

Proposition 7

Unicité de la limite Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est unique, i.e. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1 \in \mathbb{R}$ et $L_2 \in \mathbb{R}$ alors $L_1 = L_2$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $L_1 \in \mathbb{R}$ et $L_2 \in \mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $L_1 \neq L_2$ et soit $\varepsilon = \frac{|L_1-L_2|}{3}$.

Par définition de la convergence il existe alors $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$\forall n \geqslant p_1 \quad |u_n - L_1| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant p_2 \quad |u_n - L_2| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour $n \geqslant \max(p_1, p_2)$ on a

$$|L_1 - L_2| \leqslant |L_1 - u_n| + |u_n - L_2| \leqslant 2\varepsilon \leqslant \frac{2}{3}|L_1 - L_2|$$

Ce qui est absurde. Ainsi $L_1 = L_2$. □

Exemple 7.

— Soit $c \in \mathbb{R}$, la suite constante $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{1}{n^2}$$

converge vers 0.

Prouvons-le

Soit $\varepsilon > 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a alors

$$\begin{aligned}
&|u_n - 0| \leqslant \varepsilon \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon \\
\Leftrightarrow & n^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{car } \varepsilon \text{ et } \frac{1}{n^2} \text{ sont de même signe.} \\
\Leftrightarrow & n \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \text{car } n \text{ et } \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ sont tous deux positifs.}
\end{aligned}$$

Posons donc $p = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right\rfloor$, on a alors

$$\forall n \geqslant p \qquad |u_n - 0| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers 0.

— La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = (-1)^n$$

diverge.

— La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = n$$

diverge

Définition 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ou que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\forall K \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant K$$

respectivement

$$\forall K \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant K$$

Remarque 5. On pourra se limiter à $K > 0$ (respectivement K<0

Remarque 6. On ne dira JAMAIS qu'une suite converge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente.

Théorème 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L_1 et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L_2.
Alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λL_1, la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1 + L_2$ et la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1 L_2$.
Si, de plus la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $L_2 \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{L_1}{L_2}$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L_1 et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L_2.

— Si $\lambda = 0$ alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à 0 et converge donc vers 0. On suppose désormais que $\lambda \neq 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant p, \quad |u_n - L_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$
Ainsi, pour $n \geqslant p$ on a
$$|\lambda u_n - \lambda L_1| = |\lambda|\,|u_n - L_1| \leqslant \lambda \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \leqslant \varepsilon$$
La suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers λL_1.

— Soit $\varepsilon > 0$
Soit $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que
$$\forall n \geqslant N_1, \quad |u_n - L_1| \leqslant \varepsilon$$
$$\forall n \geqslant N_2, \quad |v_n - L_2| \leqslant \varepsilon$$
Pour $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a alors
$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (L_1 + L_2)| &\leqslant |u_n - L_1| + |v_n - L_2| \\ &\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$
Quitte à remplacer ε par $\frac{\varepsilon}{2}$ on obtient le résultat voulu. Ainsi la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1 + L_2$.

— Soit $\delta > 0$
Soit $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que
$$\forall n \geqslant N_1, \quad |u_n - L_1| \leqslant \delta$$
$$\forall n \geqslant N_2, \quad |v_n - L_2| \leqslant \delta$$
Pour $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a alors
$$\begin{aligned} |u_n v_n - L_1 L_2| &\leqslant |u_n v_n - L_1 v_n + L_1 v_n - L_1 L_2| \\ &\leqslant |u_n v_n - L_1 v_n| + |L_1 v_n - L_1 L_2| \\ &\leqslant |v_n|\,|u_n - L_1| + |L_1||v_n - L_2| \\ &\leqslant (|v_n - L_2| + |L_2|)\,|u_n - L_1| + |L_1||v_n - L_2| \qquad \leqslant (\delta + |L_2|)\delta + |L_1|\delta \end{aligned}$$
Soit alors ε. Posons $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{|L_1|+2|L_2|}, |L_2|\right)$ de sorte que l'on ait
$$(\delta + |L_2|)\delta + |L_1|\delta \leqslant 2|L_2|\delta + |L_1|\delta \leqslant \varepsilon$$
et notons $N_3 = \max(N_1, N_2)$. Alors,
$$\forall n \geqslant N_3 \qquad |u_n v_n - L_1 L_2| \leqslant \varepsilon$$

— On va prouver que la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ tend vers $\frac{1}{L_2}$.
Soit $\delta \in \left]0, \frac{|L_2|}{2}\right[$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N \qquad |v_n - L_2 \leqslant \delta$$
On a alors
$$\forall n \geqslant N \qquad \frac{|L_2|}{2} < |L_2| - \delta \leqslant |v_n| \leqslant \delta + L_2$$
D'où, pour $n \geqslant N$
$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{L_2}\right| &\leqslant \frac{|L_2 - v_n|}{|v_n||L_2|} \\ &\leqslant \frac{2\delta}{|L_2|^2} \end{aligned}$$
Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \frac{|L_2|^2\varepsilon}{2}$, on a alors
$$\forall n \geqslant N, \qquad \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{L_2}\right| \leqslant \varepsilon$$
Ainsi la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{L_2}$, et ,d'après le point précédent, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{L_1}{L_2}$.

□

Théorème 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$ et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

— Si $\lambda > 0$ alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
— Si $\lambda < 0$ alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
— Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $-\infty$ alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
— Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite $\ell > 0$ (éventuellement $\ell = +\infty$) alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
— Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite $\ell < 0$ (éventuellement $\ell = -\infty$) alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Démonstration. — Soit $K > 0$, on a alors $\frac{K}{\lambda} > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant \frac{K}{\lambda}$$

Ainsi

$$\forall n \geqslant N, \quad \lambda u_n \geqslant K$$

On en déduit que $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

— Soit $K < 0$, on a alors $\frac{K}{\lambda} > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant \frac{K}{\lambda}$$

Ainsi

$$\forall n \geqslant N, \quad \lambda u_n \leqslant K$$

On en déduit que $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$

— On sait que $\ell \neq -\infty$, ainsi,
Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad v_n \geqslant \ell - 1$$

Si $\ell = +\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad v_n \geqslant 0$$

Dans tous les cas la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang. Soit donc $M \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad v_n \geqslant M$$

Soit $K \in R$, on sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ainsi il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N', \quad u_n \geqslant K - M$$

Ainsi, en notant $\tilde{N} = \max(N, N')$

$$\forall n \geqslant \tilde{N}, \quad u_n + v_n \geqslant K$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.

— On sait que $\ell > 0$, ainsi,
Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad v_n \geqslant \ell - \frac{\ell}{2}$$

Si $\ell = +\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad v_n \geqslant 1$$

Dans tous les cas la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par une constante strictement positive. Soit donc $M > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad v_n \geqslant M$$

Soit $K \in R$, on sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ainsi il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N', \quad u_n \geqslant \frac{K}{M}$$

Ainsi, en notant $\tilde{N} = \max(N, N')$

$$\forall n \geqslant \tilde{N}, \quad u_n v_n \geqslant K$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

— Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite $\ell < 0$ alors $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\ell > 0$.
D'après la point précédent $(-u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend alors vers $+\infty$.
D'après le second point, on en déduit alors que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend alors vers $-\infty$.

□

On peut résumer les résultats précédent dans des tableaux
On verra plus tard des méthodes pour lever les formes indéterminées.

Théorème 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On considère les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement des termes d'indice pairs et impairs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si les deux sous-suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux convergentes et convergent vers la même limite.

Remarque 7. Ce résultat sera fondamental pour l'étude des suites définies par récurrence

Démonstration. — Supposons dans un premier temps que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \quad |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$\forall n \geqslant \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \qquad |u_{2n} - L| \leqslant \varepsilon$$

$$\forall n \geqslant \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \qquad |u_{2n+1} - L| \leqslant \varepsilon$$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc toutes les deux convergentes vers L.

— Réciproquement supposons que suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc toutes les deux convergentes vers une limite $L \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N_1 \quad |u_{2n} - L| \leqslant \varepsilon$$

$$\forall n \geqslant N_2 \quad |u_{2n+1} - L| \leqslant \varepsilon$$

Alors

$$\forall n \geqslant \max(2N_1, 2N_2 + 1) \qquad |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers L.

□

B Résultats fondamentaux : Limites et inégalités

Théorème 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers L.
Si $L \neq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non-nulle à partir d'un certain rang. Plus précisément, si $L > 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang et si $L < 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement négative à partir d'un certain rang.

Démonstration. — Supposons $L > 0$. On considère $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, \qquad |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$
On a donc
$$\forall n \geqslant N \qquad L - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant L + \varepsilon$$
C'est-à-dire
$$\forall n \geqslant N \qquad \frac{L}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3\varepsilon}{2}$$
En particulier, comme $\frac{L}{2} > 0$,
$$\forall n \geqslant N \qquad u_n > 0$$

— Supposons $L < 0$. On considère $\varepsilon = \frac{-L}{2} > 0$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, \qquad |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$
On a donc
$$\forall n \geqslant N \qquad L - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant L + \varepsilon$$
C'est-à-dire
$$\forall n \geqslant N \qquad \frac{3L}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{L}{2}$$
En particulier, comme $\frac{L}{2} < 0$,
$$\forall n \geqslant N \qquad u_n < 0$$

□

Théorème 12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque 8. La réciproque est ABSOLUMENT FAUSSE. Dire qu'une suite converge car elle est bornée est passible de bannissement dans le sixième cercle des Enfers.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente, notons L sa limite. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N \qquad |u_n - L| \leqslant 1$$

Ainsi,
$$\forall n \geqslant N \qquad u_n \in [L-1, L+1]$$

L'ensemble $\{u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}\}$ est fini (plus précisément il admet N éléments), il est donc borné. Soit alors $(m, M) \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall k \in [\![0, N-1]\!] \qquad m \leqslant u_k \leqslant M$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\min(m, L-1) \leqslant u_n \leqslant \max(M, L+1)$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée. □

Théorème 13

Passage des inégalités à la limite Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives L_1 et L_2. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supérieure à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire
$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \qquad u_n \leqslant v_n$$
Alors $L_1 \leqslant L_2$

Démonstration. Supposons par l'absurde que $L_1 > L_2$. La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers un réel strictement positif.

Ainsi la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang, il existe donc $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N_2 u_n > v_n$$

Soit $n \geqslant \max(N, N_2)$, on a alors
$$v_n < u_n \leqslant v_n$$
ce qui est absurde. Ainsi $L_1 \leqslant L_2$. □

Remarque 9. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement supérieure à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \qquad u_n < v_n$$

Alors on n'a tout de même qu'une inégalité large à la limite $L_1 \leqslant L_2$. Un exemple simple à considérer est l'exemple des suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème 14

Théorème des gendarmes Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que
- $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.

Alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n \qquad a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1 \qquad |a_n - L| \leqslant \varepsilon$$

$$\forall n \geqslant N_2 \qquad |c_n - L| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi

$$\forall n \geqslant N_1 \qquad a_n \geqslant L - \varepsilon$$
$$\forall n \geqslant N_2 \qquad |c_n \leqslant L + \varepsilon$$

D'où, pour $n \geqslant \max(N, N_1, N_2)$ on a

$$L - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \leqslant L + \varepsilon$$

Ainsi

$$\forall n \geqslant \max(N, N_1, N_2), \qquad |b_n - L| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers L. □

Proposition 15

Extension aux limites infinies Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \qquad a_n \leqslant b_n$$

- Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Démonstration.
- On suppose que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ Soit $K > 0$ et soit $(N, N') \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \qquad a_n \leqslant b_n$$

$$\forall n \geqslant N', \qquad a_n \geqslant K$$

  Alors

$$\forall n \geqslant \max(N, N'), \qquad b_n \geqslant K$$

  Ainsi $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
- On suppose que $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ Soit $K < 0$ et soit $(N, N') \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \qquad a_n \leqslant b_n$$

$$\forall n \geqslant N', \qquad b_n \leqslant K$$

  Alors

$$\forall n \geqslant \max(N, N'), \qquad a_n \leqslant K$$

  Ainsi $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

□

Exemple 8. 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln(n+k)}$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$ on a $\frac{1}{\ln(n+k)} \geqslant \frac{1}{\ln(2n)}$, ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant \frac{n}{\ln(2n)}$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} v_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \end{cases}$$

On a clairement

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n \geqslant 0$$

D'où

$$\forall n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0.

C Résultats fondamentaux : Limite et monotonie

Théorème 16

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante à partir d'un certain rang et majorée, alors elle converge vers un réel L et on a

$$L = \sup\{u_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$$

De même si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à partir d'un certain rang et minorée, alors elle converge vers un réel ℓ et on a

$$\ell = \inf\{v_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$$

Démonstration. — Rappelons la caractérisation de la borne supérieure

$$S = \sup(A) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall a \in A \;\; a \leqslant S \\ \forall \varepsilon > 0, \; existsa \in A, \; S - \varepsilon \leqslant a \leqslant S \end{cases}$$

Ici l'ensemble $\{u_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré. Il admet donc une borne supérieure que l'on note L.
On a en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant L$$

Soit $\varepsilon > 0$. La deuxième ligne de la caractérisation de la borne supérieure nous dit qu'il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $L - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant L$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on a

$$\forall n \geqslant N \qquad u_n \geqslant u_N$$

Ainsi

$$\forall n \geqslant N \qquad L - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_n \leqslant L$$

D'où

$$\forall n \geqslant N \qquad |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

On a donc prouvé que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

— Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à partir d'une certain rang et minorée alors $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante à partir d'un certain rang et majorée. Elle converge alors vers une limite $L = \sup\{-v_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$.
Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$\ell = -L = -\sup\{-v_n \ , \ n \in \mathbb{N}\} = \inf\{v_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$$

□

Remarque 10. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majoré par $M \in \mathbb{R}$ alors elle converge mais RIEN ne nous dit qu'elle converge vers M. On a par contre

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leqslant M$$

Corolaire 17

Toute suite monotone bornée converge. La réciproque est FAUSSE

Exemple 9. On a vu plus tôt que, pour $x > 0$, la suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang et minorée par 0. Ainsi elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

On verra plus tard que $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Théorème 18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang et non majorée. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang et non minorée. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang et non majorée. Soit $K > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, elle n'est en particulier pas majorée par K. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant K$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a de plus

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant u_N$$

D'où

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant K$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend bien vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

- On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang et non minorée. Alors $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang et non majorée. Donc $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

□

Remarque 11. Une suite non-bornée est divergente mais n'admet pas forcement de limite. Par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (-1)^n n$$

n'est ni majorée, ni minorée, et elle n'admet pas de limite.

Définition 14

Suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si

- Elles sont monotones de sens contraire.
- $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

Théorème 19

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.

Démonstration. Pour fixer les idées supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Alors la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle converge vers 0 on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n - v_n \geqslant 0$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant v_n$$

Et, par monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \geqslant u_n \geqslant v_n \geqslant v_0$$

DESSIN

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par v_0, elle converge donc vers une limite L_1. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par u_0, elle converge donc vers une limite L_2.

Ainsi, la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1 - L_2$.

Par unicité de la limite on a alors $L_1 - L_2 = 0$, c'est-à-dire $L_1 = L_2$. □

D Limite et continuité

On ne va pas donner ici une définition rigoureuse de la continuité, tous les résultats seront donc admis.

Théorème 20

Soit f une fonction continue de D_f dans $\mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers une limite L. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in D_f \qquad \text{et} \qquad L \in D_f$$

Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers $f(L)$.

Ce résultat peut s'étendre aux situations avec des limites infinies.

Théorème 21

Soit f une fonction de D_f dans $\mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in D_f \qquad \text{et } \lim_{x\to\ell} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Exemple 10.
- La suite $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers 0.
- La suite $\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers 0.

Proposition 22

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Alors il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
On dit que x_0 est un point fixe de f sur $[a,b]$.

La recherche de points fixes sera d'une grande importance pour l'étude de la convergence des suites récurrentes plus tard.

Théorème 23

Soit f une fonction continue de D_f dans $\mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in D_f \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers une limite $L \in D_f$.
Alors L est un point fixe de $\mathbb{R}$

Remarque 12. Il faut faire attention aux cas où L existe mais n'appartient pas à D_f, dans ces cas, comme $f(L)$ n'est pas défini,

IV Étude des suites récurrentes

On va s'intéresser ici aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une fonction continue définie sur I et prenant ses valeurs dans I.

Dans ce cas, on sait alors que

- Puisque $f(I) \subset I$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $L \in I$ alors L vérifie $f(L) = L$.

Théorème 24

Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \in I \forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = f(u_n)$$

— Si f est croissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

— Si f est décroissante alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.

Remarque 13. Ce résultat bien que très pratique, n'est pas au programme. Aussi vous ne pouvez pas l'utilisez mais le connaître va vous guider dans votre démarche de résolution.

Démonstration. Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \in I \forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = f(u_n)$$

— Deux situations sont en fait possibles selon si $u_1 \leqslant u_0$ ou si $u_1 \geqslant u_0$

Supposons que $u_1 \geqslant u_0$ et montrons alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n$$

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) \qquad u_{n+1} \geqslant u_n$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on a alors $u_n \leqslant u_{n+1}$

Or $u_n \in I$, $u_{n+1} \in I$ et f est croissante sur I, ainsi $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ est achève la récurrence.

Supposons désormais que $u_1 \leqslant u_0$ et montrons alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$$

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) \qquad u_{n+1} \leqslant u_n$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on a alors $u_n \geqslant u_{n+1}$

Or $u_n \in I$, $u_{n+1} \in I$ et f est croissante sur I, ainsi $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ est achève la récurrence.

— On sait que, si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante.

Or, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n})$$

$$u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$$

Le résultat précédent nous dit alors que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

Le sens de montonie va dépendre de u_0 et u_2 :

— Si $u_2 \leqslant u_0$ alors $u_3 \geqslant u_1$ et ainsi $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

— Si $u_2 \geqslant u_0$ alors $u_3 \leqslant u_1$ et ainsi $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Dans tous les cas $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.

□

Les outils informatiques peuvent nous être utiles, par exemple en traçant l'évolution de la suite en fonction de n sur une graphique avec n en abscisse et u_n en ordonnée mais surtout par le tracé d'un graphique en escalier de la suite.

Sur un tel graphique on trace les courbes représentatives de f et de la fonction $\mathrm{Id} : x \mapsto x$. Partant de l'abscisse u_0 on monte jusqu'à atteindre la courbe de f à l'ordonnée u_1. On va ensuite se déplacer horizontalement jusqu'à la courbe de Id, à l'abscisse u_1 puis on repart à la verticale vers la courbe de f à l'ordonnée u_2. On continue ainsi de suite ce qui nous donne une bonne idée de l'évolution de la suite.

Un bon exemple valant mieux que de long discours, on a tracé ci-après des graphique en escalier pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1.9 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 0.1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \sqrt{2 - v_n} \end{cases}$$

On peut pour cela utiliser les fonctions Python suivantes

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy

def suiterec(n,u0,f):

    s=(u0,)
    u=u0
    for i in range(n):
        u=f(u)
        s=s+(u,)
    return(s)


def suiteexpl(n,f):

    s=tuple(f(x) for x in range(n+1))
    return(s)



def escalier(n,u0,f,xmin,xmax):

    plt.figure()
    x=numpy.linspace(xmin,xmax,100)
    plt.plot([xmin,xmax],[xmin, xmax],color='r')
    axes = plt.gca()
    axes.set_xlim([xmin,xmax])
    axes.set_ylim([min(f(x)),max(f(x))])
    plt.plot(x,f(x),color='b')
    u=u0
    plt.plot([u,u],[0,u],color='0.80')
    for i in range(n+1):
        plt.plot([u,u,f(u)],[u,f(u),f(u)],color='0.80')
        u=f(u)
    plt.axes([xmin,xmax,min(f(x)),max(f(x))])
    plt.show()
```

Pour étudier une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ on va alors suivre le protocole suivant (dans la plupart des exercices ces étapes seront détaillées et décomposées en plusieurs questions)

- On étudie la fonction f (en particulier sa continuité) et on détermine un intervalle I tel que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$. C'est cette étape qui servira à montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
- On étudie la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$: ses points d'annulation sont les points fixes de f et donc les éventuelles limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si de plus g est de signe constant sur I alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
- On étudie la monotonie de f : Si f est croissante on va ensuite prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et si f est décroissante on va ensuite prouver que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens contraires.

- On étudie la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone on cherche alors à montrer qu'elle est bornée et on recherche sa limite parmi les points fixes de f (en général on a de la chance, il n'y en a qu'un). Si ce sont $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont monotones et de sens contraires alors on cherche à montrer qu'elles sont bornées et qu'elles convergent vers la même limite.

  Attention les limites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas forcément des points fixes de f. Ce sont par contre des points fixes de $f\circ f$.
- Si f n'est pas monotone mais qu'elle n'admet qu'un point fixe ℓ alors on essaye d'étudier la suite $(u_n-\ell)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 11. 1. $\begin{cases} u_0 > -1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3}{1+3u_n} \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1-u_n^2 \end{cases}$

V Comparaison de suites

A Croissances comparées

Vous avez vu au lycée comment lever des indéterminations du type $\frac{P(n)}{Q(n)}$ où P et Q sont des polynômes en mettant en évidence les termes de plus haut degré.

Proposition 25

Soit

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \qquad Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

alors la suite $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_p n^p}{b_q n^q}$$

Vous avez aussi vu des résultats dits « de croissances comparées »que l'on va compléter

Proposition 26

Règles de croissances comparées Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $q > 1$, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\ln(n)^\beta} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{q^n} = +\infty$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} q^n \frac{n!}{=} 0$$

Remarque 14. De manière schématique on a

$$\ln(n)^\beta \quad \ll \quad n^\alpha \quad \ll \quad q^n \quad \ll \quad n!$$

B Équivalence de deux suites en $+\infty$

L'idée derrière la notion d'équivalence de deux suites en $+\infty$ est de formaliser des phrases du type « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à peu près égales »ou bien « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent à la même vitesse ».

Définition 15

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites non-nulles à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes (quand n tend vers $+\infty$) ce que l'on note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Proposition 27

Soit $C \neq 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non-nulle à partir d'un certain rang. Alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} C$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers C.

Remarque 15. Une suite qui converge vers 0 n'est pas équivalente à 0. Par convention on dira qu'une suite est équivalente à 0 lorsqu'elle est nulle à partir d'un certain rang.

Démonstration. C'est une simple conséquence de la définition. □

Exemple 12.
— $n^2 + n + 1 \underset{+\infty}{\sim} n^2$
— $e^n + \ln(n) - n^3 \underset{+\infty}{\sim} e^n$

Proposition 28

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites non-nulles à partir d'un certain rang. Alors
— $u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$
— $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$
— Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$

Démonstration. Il s'agit de simples conséquences de la définition. □

Proposition 29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites non-nulles à partir d'un certain rang. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$.

Remarque 16. La réciproque est FAUSSE, deux suites qui ont la même limite ne sont pas forcement équivalente. Par exemple $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ mais $e^n \underset{+\infty}{\not\sim} n^2$.

C Manipulation des équivalents

Théorème 30

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites non-nulles à partir d'un certain rang telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors
— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda v_n$
— $\frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$
— Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $u_n^p \underset{+\infty}{\sim} v_n^p$
— Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs positives alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.
— Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites non-nulles à partir d'un certain rang telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n a_n \underset{+\infty}{\sim} v_n b_n$ et $\frac{u_n}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{v_n}{b_n}$

Remarque 17. — Il est important de noter qu'ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS. Par exemple $n^2 + n \underset{+\infty}{\sim} n^2$, $-n^2 \underset{+\infty}{\sim} -n^2 + 3$ mais $n^2 + n - n^2 \underset{+\infty}{\not\sim} n^2 - n^2 + 3$.

— On ne peut pas non plus composer les équivalents pas des fonctions. Par exemple $n\pi \underset{+\infty}{\sim} n\pi + \frac{\pi}{2}$ mais $\sin(n\pi) \underset{+\infty}{\not\sim} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Un exception à cette dernière remarque : le ln mais seulement dans certains cas.

Proposition 31

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs strictement positives telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $L \neq 1$ (éventuellement $+\infty$).
Alors $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs strictement positives telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $L \neq 1$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n \neq 1$ il existe alors un rang N à partir duquel $v_n \neq 1$.

Pour $n \geqslant N$ on a alors

$$\begin{aligned}\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} &= \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n} v_n\right)}{\ln(v_n)} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) + \ln(v_n)}{\ln(v_n)} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

De plus $\lim_{n\to+\infty} v_n \neq 1$, ainsi $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) \neq 0$. Le quotient $\frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}$ ne donne pas naissance à une forme indéterminée. On a, dans tous les cas

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} = 0$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = 1$, c'est-à-dire $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. □

D Calcul d'équivalents

Proposition 32

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites non-nulles à partir d'un certain rang. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. Alors

$$u_n + v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$$

Démonstration. Simple conséquence de la définition □

Exemple 13. — $2^n + n^3 \underset{+\infty}{\sim} 2^n$

— $3n + (-1)^n \underset{+\infty}{\sim} 3n$

Proposition 33

Soit P et Q deux polynômes avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{q} b_k x^k$$

Alors $P(n) \underset{+\infty}{\sim} a_p n^p$ et $Q(n) \underset{+\infty}{\sim} b_q n^q$.
Ainsi $\frac{P(n)}{Q(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_p n^p}{b_q n^q}$

Exemple 14. $3n-1 \underset{+\infty}{\sim} 3n$ d'où $(3n-1)^3 \underset{+\infty}{\sim} 27n^3$, $n^3+3n+5 \underset{+\infty}{\sim} n^3$. Ainsi

$$\frac{n^3+3n+5}{(3n-1)^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^3}{27n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{27}$$

Remarque 18. Remarque de rédaction : On ne mélange pas les $\sim$ et les $=$.

Théorème 34

Soit f une fonction de la variable réelle définie et dérivable en 0 telle que $f'(0) \neq 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non-nulle à partir d'un certain rang qui converge vers 0. Alors

$$f(u_n) - f(0) \underset{+\infty}{\sim} f'(0)u_n$$

Corolaire 35

Équivalents classiques à connaître Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non-nulle à partir d'un certain rang qui converge vers 0. Alors

- $e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$
- $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
- $\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
- $\tan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n$
- $\cos(u_n) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$

Exemple 15. Exemple archi-classique Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Si $x=0$ alors l'égalité est évidente. On suppose désormais $x \neq 0$

Pour n assez grand $\frac{x}{n}$ est strictement supérieur à -1 et donc $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ est bien défini. On a alors

$$n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{x}{n} \underset{+\infty}{\sim} x$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^x$$

C'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Exemple 16. Donner des équivalents simples de

- $\ln(n^2+2n+5)$
- $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$
- $\ln\left(\frac{2n+5}{7n^2+3n}\right)$
- $\ln\left(\frac{2n^2+4n+3}{7n^2+5n+1}\right)$
- $\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{2}{n}}-1}$
- $n^2\ln\left(\frac{n+1}{2}\right)$
- $n\ln\left(1+e^{-n}\right)$
- $n-\sqrt{n^2+1}$
- $4n-\sqrt{n^2+1}$
- $\sqrt{\frac{n^2+1}{n+3}}$
- $(n-3)\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+3}}$