Chapitre 1 : Fonction exponentielle.

I Approche Globale.

A Un peu d'histoire.

Jost Bürgi (1552-1632)

Vers 1605-1610, Jost Bürgi conçoit des tables de correspondances entre une suite géométrique de premier terme 10^8 et de raison 1,000 1 et une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 10. (table logarithmique)

Isaac Newton (1643-1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Leonhard Euler (1707-1783)

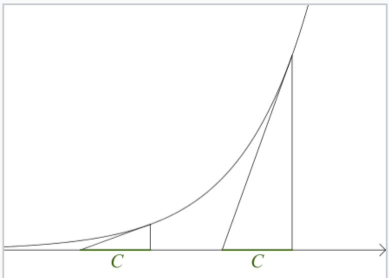
Florimond de Beaune (1601-1652)

René Descartes (1596-1650)

Par la suite, au cours du XVII siècle les mathématiciens s'intéressent au problème des tangentes (comment tracer les tangentes à une courbe) et le problème inverse des tangentes (comment, connaissant une propriété sur les tangentes, reconstituer la courbe correspondante). La résolution de ces deux problèmes va être grandement facilitée par la mise en place du calcul différentiel chez Newton et Leibniz principalement dans la seconde moitié du siècle. En 1638, Florimond de Beaune , qui travaille sur un problème de corde vibrante, demande à René Descartes de déterminer la courbe dont la tangente vérifie une certaine propriété. En 1639, Descartes ramène le problème à la recherche d'une courbe dont la sous-tangente serait constante. La sous-tangente est la distance qui sépare le projeté du point M sur l'axe des abscisses et l'intersection de la tangente en M avec ce même axe des abscisses :

Traduit en langage actuel, cela consiste à chercher la courbe d'équation y= f(x) sachant que $\frac{f}{f'} = C$. Cette équation différentielle a pour solutions les courbes d'équation :

$$y = Ae^{\frac{x}{C}}$$



Une fonction exponentielle et ses sous-tangentes constantes : si la courbe a pour équation $y = a^x$, la constante vaut $1/\ln(a)$

Euler donne le développement en série de l'exponentielle, introduit en 1731 la notation avec la lettre e et surtout est le premier à faire intervenir les fonctions trigonométriques et exponentielles comme solutions d'équations différentielles.

Nous ne choisirons pas cette approche pour l'introduction de la fonction exponentielle mais plutôt celle des suites géométriques vues au chapitre précédent.

B Attendus.

- Savoir manipuler les propriétés algébriques de l'exponentielle pour simplifier une expression.
- Savoir déterminer les variations d'une fonction de base q.
- Connaitre les formules de dérivation et déterminer les dérivées de fonctions faisant intervenir l'exponentielle (e^x).
- Savoir utiliser la formule $(e^u)' = u'e^u$.
- Savoir étudier les variation d'une fonction.
- Savoir déterminer l'équation d'une tangente.
- Déterminer la position relative de deux représentations.
- Résoudre des équations et des inéquations.
- Faire une étude de fonction : calcul de la dérivée et tableau de variation.
- Trouver des extremums à partir de l'étude de la fonction.

C Démonstrations à connaître.

- Unicité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = f(x)$$

- $\lim_{x\to-\infty} exp(x) = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} exp(x) = +\infty$
- Propriétés algébriques de l'exponentielle.
  — $e^{x+y} = e^x \times e^y$
  — $e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$
  — $(e^x)^y = e^{xy}$
  — $(e^{nx} = (e^x)^n$
- Formule : $(e^u)' = u'e^u$. (Juste savoir que c'est la conséquence immédiate de $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$.)

II Définition.

Autre façon de définir la fonction exponentielle :

- équation fonctionnelle,
- fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
- $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Définition-Proposition 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = f(x) \tag{1}$$

Cette unique solution est appelée fonction exponentielle et est notée :

$$\exp(x) \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{e}^x$$

Démonstration 1. Supposons l'existence de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant la même propriété (1) (égales ou différentes).
On définie la fonction h par :

$$h(x) = g(x) \times f(-x)$$

Alors en utilisant $g' = g$ et $h' = h$:

On utilise ici la formule : $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$

$$h'(x) = g'(x) \times f(-x) - g(x) \times f'(-x) = g(x) \times f(-x) - g(x) \times f(-x) = 0$$

Donc h est une fonction constante, or :

$$h(0) = g(0) \times f(0) = 1$$

Donc h est une fonction constante égale à 1.
On montre aussi que toute fonction vérifiant (1) est non nulle sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, comme on peut choisir $g = f$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) \times f(-x) = 1 \Leftrightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on obtient donc :

$$h(x) = 1 = g(x) \times \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow g(x) = f(x)$$

D'où l'unicité de la fonction vérifiant (1).

Corolaire 2

La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même :

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Si l'on considère une fonction u dérivable alors :

$$\exp(u(x))' = u' \times \exp(x)$$

Que l'on note aussi : $(e^u)' = u'e^u$.

A retenir 1. .
On obtient donc le cas particulier :

$$\left(\mathrm{e}^{ax+b}\right)' = a\mathrm{e}^{ax+b}$$

III Étude de la fonction exponentielle.

A Tableau de variation.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

***A retenir* 2.** . On remarque que exp est croissante et positive.

B Limites.

Proposition 3

- $\lim\limits_{x \to -\infty} exp(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$

On justifie ici les limites aux bornes du tableau de variation précédent.

Démonstration 2. On fait l'étude de $f(x) = \mathrm{e}^x - (x+1)$.

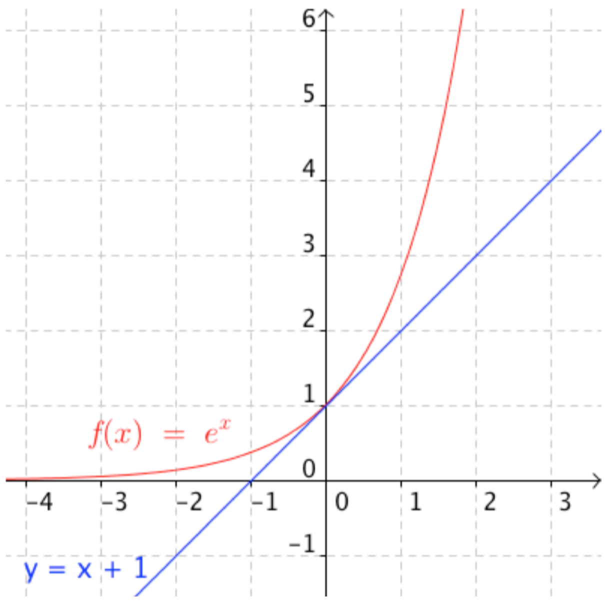
$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

D'après le tableau de variation précédent, $\mathrm{e}^x \geqslant 1$ sur $\mathbb{R}^+$:
En effet $f(0) = 0$.
Donc $f(x) \geqslant 0$, donc $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

Démonstration 3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$

C Représentation graphique.



***A retenir* 3.** . On remarque que la fonction est convexe. Ceci puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ exp''(x) = exp(x) > 0$$

Donc les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_{exp}$ sont systématiquement "en dessous".

On détermine la tangente à $\mathscr{C}_{exp}$ en utilisant la formule :

$$y = exp'(0)(x-0) + exp(0) = x+1$$

D Propriétés algébriques et fonctionnelles.

Proposition 4

Si l'on reprend les propriétés de la partie précédente avec l'écriture fonctionnelle, pour tous x et y réels et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(y-x) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(x)}$
- $\exp(x)^y = exp(xy)$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

- $e^0 = 1$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $(e^{nx} = (e^x)^n$

A retenir 4. .
C'est propriétés permettent de justifier la notation puissance

$$e^x$$

A retenir 5. .
Formule sur les puissances :

- $a^0 = 1$
- $a^{n+m} = a^n a^m$
- $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^m}$
- $(a^n)^m = a^{n\times m}$
- $(ab)^n = a^n \times b^n$

A retenir 6. .
Ici, si l'on choisit $e \simeq 2,71$ on peut vérifier la similitude des valeurs $\exp(x)$ et $1,71^x$.

Démonstration 4. On définie la fonction h par :

$$h(x) = exp(x+y) \times exp(-x)$$

Alors :

$$h'(x) = \exp'(x+y) \times \exp(-x) - \exp(x+y) \times \exp'(-x) = h(x) - h(x) = 0$$

Donc h est une fonction constante. Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(0) = \exp(y)$ On rappel que $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$, donc pour tous x et y de $\mathbb{R}$, on a :

$$\exp(y) = \exp(x+y) \times \exp(-x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} \Leftrightarrow \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Démonstration 5. Avec la propriété précédente :

$$\exp(y-x) = \exp(y) \times \exp(-x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)}$$

Démonstration 6. On commence par étudier le cas $n \geqslant 0$. On pose : "P_n : $(e^{nx} = (e^x)^n$" pour démontrer cette propriété par récurrence.
On a évidemment : $\exp(0 \times x) = \exp(0) = 1$ et $\exp(x)^0 = 1$. Donc P_0 est vrai.
Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose vrai la propriété P_n : $(e^{nx} = (e^x)^n$.

$$\exp((n+1)x) = \exp(nx+x) = \exp(nx) \times \exp(x) = (exp(x))^n \times \exp(x) = (exp(x))^{n+1}$$

IV Compléments.

A Lien avec le logarithme.

Proposition 5

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln e^x = x$
- $\forall x \in]0, +\infty[,\ e^{\ln x} = x$

A retenir 7. .
Les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre.

B Définition de la puissance.

Définition 1

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x, on définit a^x par :

$$a^x = e^{x \times \ln a}$$