Chapitre 2 : Dénombrement.

En mathématiques, le **dénombrement** est la détermination du nombre d'éléments d'un ensemble. Il s'obtient en général par un comptage ou par un calcul de son cardinal à l'aide de techniques combinatoires.

I Généralités.

A Programme.

La combinatoire et le dénombrement ont un objectif est double :

- manipuler quelques notions ensemblistes, notamment celles de produit cartésien, de couple, de liste ou k-uplet, qui interviennent dans toutes les parties du programme ;
- dénombrer quelques objets combinatoires de base (listes d'éléments, combinaisons, permutations) pouvant être représentés diversement : parties d'un ensemble, mots, chemins dans un arbre.

Il s'agit ainsi d'enrichir le vocabulaire ensembliste des élèves et d'offrir une initiation aux mathématiques discrètes, qui jouent un rôle important dans le développement de l'informatique.

Cette partie donne également l'occasion de travailler le raisonnement par récurrence et de prolonger le travail engagé en classe de première sur les aspects algébriques ou combinatoires des suites.

Les ensembles considérés dans cette section sont finis mais on introduit dans le cas général (ensembles quelconques) les notions suivantes : couple, triplet, k-uplet (ou k-liste) ; produit cartésien de deux, trois, k ensembles ; ensemble A^k des k-uplets d'éléments d'un ensemble A.

1 Contenus

- Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.
- Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble à n éléments.
- Nombre des parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les k-uplets de $0, 1$, les mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments, les chemins dans un arbre, les issues dans une succession de n épreuves de Bernoulli.
- Nombre des k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Définition de $n!$. Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments.
- Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins.
- Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, formule :
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
- Explicitation pour $k = 0, 1, 2$. Symétrie. Relation et triangle de Pascal.

2 Capacités attendues

- Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer.
- Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).

3 Démonstrations

- Démonstration par dénombrement de la relation :
$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{\mathrm{Card}(E)}$$
- Démonstrations de la relation de Pascal (par le calcul, par une méthode combinatoire).

4 Approfondissement

Combinaisons avec répétitions.

5 Exemples d'algorithme

- Pour un entier n donné, génération de la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ à l'aide de la relation de Pascal.
- Génération des permutations d'un ensemble fini, ou tirage aléatoire d'une permutation.
- Génération des parties à 2, 3 éléments d'un ensemble fini.

B Histoire.

Des propriétés arithmétiques du Triangle de Pascal étaient présentes dans les travaux combinatoires des mathématiques indiennes et chinoises. Les coefficients binomiaux étaient connus sous la forme du triangle en Orient et au Moyen-Orient (au X et au XI siècle) plusieurs siècles avant que Blaise Pascal ne leur consacre un traité : « Traité du triangle arithmétique » en 1654 (publié à Paris en 1665) dans lequel il donne sa construction à l'aide de la formule qui porte son nom.

Pascal 1623-1662

La combinatoire était un objet de prédilection des récréations mathématiques dès l'Antiquité et est encore présente chez des arithméticiens du XIXe siècle (Lucas , Delannoy , Laisant). Il est par ailleurs pertinent de souligner le développement récent des « mathématiques discrètes », motivé notamment par l'informatique et l'intelligence artificielle.

Lucas 1842-1891)

Delannoy 1833-1915

Laisant 1841-1920

II Cardinal d'un ensemble fini

A Cardinal d'un ensemble et d'un sous ensemble.

Définition 1 (Cardinal)

Le cardinal d'un ensemble fini est simplement le nombre d'éléments de cet ensemble.
Par convention l'ensemble vide est fini et de cardinal 0.

Remarque 1. On dit que le cardinal un ensemble E non vide est l'entier n s'il existe une bijection entre E et $[\![1, n]\!]$. Donner une bijection entre E et $[\![1, n]\!]$ consiste à numéroter les éléments de E.

Exemple 1.
1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est fini de cardinal n.
2. Le groupe de spécialité maths est de cardinal 24.
3. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont tous infinis.

Proposition 1

Soit E un ensemble fini et soit $A \subset E$.

- Alors A est un ensemble fini et $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(E)$. De plus on a $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ si et seulement si $A = E$.
- Soit $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors $\bar{A}$ est fini et

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$

Remarque 2. Dans le cas d'équiprobabilité, en divisant par $\text{Card}(\Omega)$ on obtient simplement : $P(A) \leqslant 1$ et $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

Exemple 2. Dans notre groupe de spécialité, il y a 14 garçons sur 24 il y a donc $24 - 14 = 30$ filles.

B Union disjointe : principe additif.

Théorème 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \cdots A_n)$ une famille d'ensembles finis deux à deux disjoints. La réunion $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est un ensemble fini et alors

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}\,(A_i)$$

Si les A_i sont deux-à-deux disjoints alors : Card $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i)$

Remarque 3. C'est une méthode bien complexe d'aborder des notions bien simple !!!

Mét livre 1

1 page 277

Exemple 3.

- L'ensemble F des filles du groupe a pour cardinal 9, l'ensemble G des garons du groupe a pour cardinal 15. Le groupe de spécialité a pour cardinal :

$$\text{Card}\,(F \cup G) = \text{Card}(F) + \text{Card}(G) = 9 + 15 = 24$$

C Produit cartésien : principe multiplicatif.

Définition 2

Soient k un entier supérieur à 2 et $E_1, E_2, ..., E_k$, k ensembles **non vides**.
L'ensemble des k**-listes** (ou k**-uplets**) **ordonnées** de la forme $(x_1, x_2, \cdot, x_k)$, avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ est appelé le **produit cartésien** des ensembles $E_1, E_2, ..., E_k$ et est noté :

$$E_1 \times \cdots \times E_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_k) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \cdots, x_k \in E_k\}$$

Les 2-listes sont appelées des couples et les 3-listes des triplets.

Mét livre 2

2 page 277

Proposition 3

Soit E et F deux ensembles non-vides. Le produit cartésien $E \times F$ est fini si et seulement si A et B sont tous les deux finis et alors

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(E)$$

Plus généralement soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \cdots, E_n)$ une famille d'ensembles non vides. Le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un ensemble fini si et seulement si tous les E_i sont finis et alors

$$\text{Card}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \prod_{k=1}^{n} \text{Card}(E_k)$$

Remarque 4. Pour visualiser ce dénombrement, il est très efficace de le voir sous forme d'arbre.

Exemple 4.

- L'ensemble F des filles du groupe a pour cardinal 9, l'ensemble G des garons du groupe a pour cardinal 15. Deux cross sont organisés le lundi au lycée : un pour les filles le matin et un pour les garçons l'après midi. On veut choisir une fille et un garçon pour représenter le groupe de spécialité. On veut déterminer le nombre de possibilités de choisir ces deux représentants :

$$\text{Card}\,(F \times G) = \text{Card}(F) \times \text{Card}(G) = 9 \times 15 = 135$$

- Dans un menu, un restant propose 3 entrées différentes, deux plats principales, et 4 desserts. On note E l'ensemble des entrées, P l'ensemble des plats principaux et D l'ensemble des desserts. On cherche à déterminer le nombre de menus différents possibles :

$$\text{Card}\,(E \times P \times D) = Card(E) \times \text{Card}(P) \times \text{Card}(D) = 3 \times 2 \times 4 = 24$$

Il y a donc 24 menus différents possibles.

V 1. principe multiplicatif.

III p-listes d'un ensemble

A p-liste avec répétition d'un ensemble

1 Approche ensembliste

Définition-Proposition 4

Pour le cas particulier A^p avec $p \in \mathbb{N}^*$, les éléments de l'ensemble A^p sont appelés des **p-liste** (avec répétitions possibles) d'éléments de A et l'on a :

$$\text{Card}(A^p) = \text{Card}(A)^p$$

Remarque 5. En probabilité, on parlera de n *tirages avec remises.*

Démonstration 1. Pour construire une p-liste avec répétition possible dans un ensemble à n éléments, on a :

- n façons de choisir le premier élément.
- n façons de choisir le deuxième élément.
- ...
- n façons de choisir le $p^{ième}$ élément.

Soit donc n^p façons de construire une p-liste.

Exemple 5. Vous disposez de 10 paires de chaussettes que vous voulez ranger dans 4 tiroirs. De combien de manière différentes pouvez-vous le faire ?

On dispose d'un ensemble E les 4 tiroirs de cardinal $n = 4$ et on cherche le nombre de manières de choisir successivement et avec remise $p = 10$ éléments de E (à chaque tiroir on choisit une paire de chaussettes à y mettre.). On cherche donc le nombre de 10-listes d'éléments de E. On obtient donc 4^{10} façons de ranger les 10 chaussettes.

Mét livre 3

1 page 279

2 Approche fonctionnelle

Proposition 5

Soit E et F deux ensembles finis. L'ensemble $\mathcal{A}(E, F)$ des applications de E dans F, est fini et on a

$$\text{Card}\left(\mathcal{A}(E, F)\right) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$$

Remarque 6. Cette approche n'est pas au programme de terminale.

Démonstration 2. Soit E et F deux ensembles finis. Combien y-a-t-il d'applications de E dans F ? Comment construit-on une application ? On prend un élément de E et on lui associe un élément de F, on répète ce procédé pour tous les éléments de E.
Pour un élément $x \in E$ on a $\text{Card}(F)$ choix pour $f(x)$, on répète un tel choix autant de fois qu'il y a d'éléments dans E, soit $\text{Card}(E)$. On obtient donc $\text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$ choix possibles.

Exemple 6. Vous disposez de 10 paires de chaussettes que vous voulez ranger dans 4 tiroirs. De combien de manières différentes pouvez-vous le faire ?

Un rangement est un procédé qui à chaque paire de chaussettes associe un tiroir, c'est donc un application de l'ensemble des chaussettes dans l'ensemble des tiroirs. On sait qu'il y a 4^{10} applications de ce type, d'où $4^{10} = 1048576$ rangements différents possibles.

V 2. Exemple

B p-listes sans répétition d'un ensemble.

1 Approche ensembliste.

Définition 3

Soit F un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-liste sans répétition de F toute p-liste $(x_1, \cdots, x_p)$ d'éléments de F deux-à-deux distincts.

Remarque 7. Dans certaines littératures on parle d'arrangements à p éléments parmi n pour rappeler que l'**on range p éléments pris parmi n.**

Remarque 8. Si $\text{Card}F < p$, il n'existe pas de p-liste de F.

Théorème 6

Soit F un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in \mathbb{N}$. Alors

- Si $p \leqslant n$, il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-listes sans répétition d'éléments de F.
- Si $p > n$, il y a 0 p-listes sans répétition d'éléments de F.

Démonstration 3. Soit F un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in \mathbb{N}$. Pour obtenir une p-liste sans répétition :

- pour le premier élément, on a n façons de le choisir,
- pour le second plus que $n-1$
- ...
- pour le $p^{ième}$ plus que $n-(p-1) = n-p+1$ façons.

Donc le nombre de p-listes sans répétition est :

$$n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 7. Si l'on fait une course avec pour participant les élèves du groupe de spécialité. Si l'on veut déterminer le nombre de **podium** possible, ce nombre est simplement le nombre de *3-combinaisons* du groupe soit donc $24 \times 23 \times 22$.

Mét livre 4

2 page 279

V 3. Exemple

Définition-Proposition 7

Soit F un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Une n-liste est appelée une **permutation** des éléments de F.
Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est : $n!$

Remarque 9. Cette appellation est particulièrement explicite puisqu'il s'agit effectivement du nombre de façons de **permuter** les n éléments de E.

Démonstration 4. Voir démonstration précédente.

Exemple 8. Si l'on fait une course avec pour participant les élèves du groupe de spécialité. Si l'on veut déterminer le nombre de classement possible de **l'ensemble des élèves**, ce nombre est simplement le nombre de *permutations* du groupe soit donc 24!.

Mét livre 5

3 page 279

V 4. Exemple

Algorithmie 6 (liste des permutations)

```
def ieme(L, ele , i ):
    G=[]
    for k in range(i):
        G.append(L[k])
    G.append(ele)
    for k in range(i,len(L)):
        G.append(L[k])
    return G

def permut(L):
    if len(L)==1:
        return [L]
    else:
        G=[[L[0]]]
        for i in range(1,len(L)):
            M=[]
            taille=len(G)
            for m in range(len(G)):
                M.append(G[m])
            for j in range(i+1):
                for k in range(taille):
                    G.append(ieme(M[k],L[i],j))
            while len(G[0])==i:
                del G[0]
        return G,len(G)
```

Programme "Génération des permutations d'un ensemble fini, ou tirage aléatoire d'une permutation."

2 Approche fonctionnelle.

Proposition 8

Soit E un ensemble fini de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ et F un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\text{Nombre d'injections de } E \text{ dans } F = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E) \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} \end{cases}$$

Démonstration 5. Soit E et F deux ensembles finis. Combien y-a-t-il d'injections de E dans F ? Comment construit-on une injection de E dans F ?
On prend un élément $x_1 \in E$ et on lui associe un élément y_1 de F, pour cela on a $\mathrm{Card}(F)$ choix, on prend ensuite un autre élément $x_2 \in E$ et on lui associe un élément y_2 de F différent de y_1, pour cela on a $\mathrm{Card}(F)-1$ choix. on continue ainsi jusqu'à avoir fini E. On a donc fait $\mathrm{Card}(E)$ choix successifs avec à chaque fois une possibilité de moins d'où

$$\text{Nombre d'injections de } E \text{ dans } F = \mathrm{Card}(F) \times (\mathrm{Card}(F)-1) \times \cdots \times (\mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E) + 1)$$

Remarque 10. C'est une approche très efficace de cette démonstration.

Définition-Proposition 9

Le nombre de bijections d'un ensemble F de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ dans lui-même est $n!$. Une telle bijection est aussi appelée une **permutation** de F.

Démonstration 6. Voir démonstration précédente.

IV Combinaisons.

A Définition.

Définition 4

Soit E un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}$. On appelle k-combinaison de E toute partie de E à k éléments

Remarque 11. Une k-combinaison est simplement un sous ensemble de E à k éléments.

Algorithmie 7

Pour déterminer les 2-combinaisons et les 3-combinaisons, nous utiliserons par simplicités les listes dans Python. Alors que les listes sont des uplets et non des ensembles.

```
def deuxcombi(L):
    if len(L)<=1:
        return "aucune"
    else:
        G=[]
        for i in range(len(L)-1):
            for j in range(i+1,len(L)):
                G.append([L[i],L[j]])
        return G,len(G)

def troiscombi(L):
    if len(L)<=2:
        return "aucune"
    else:
        G=[]
        for i in range(len(L)-2):
            for j in range(i+1,len(L)-1):
                for k in range(j+1,len(L)):
                    G.append([L[i],L[j],L[k]])
        return G,len(G)
```

Programme : "Génération des parties à 2, 3 éléments d'un ensemble fini."

B Nb de sous parties à k éléments : k-combinaisons

Théorème 10

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![0, n]\!]$. Le nombre de k-combinaisons de E est le nombre $\binom{n}{k}$ donné par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Par convention, si $k < 0$ ou $k > n$ on pose $\dbinom{n}{k} = 0$. On le lit « k parmi n ».

On appelle les nombres $\dbinom{n}{k}$ des **coefficients binomiaux** (la raison viendra plus tard).

Remarque 12. Le nombre de k-combinaison peut être vu comme le nombre de manières de choisir k éléments parmi n éléments sans répétition et sans ordre.

Remarque 13. Il n'existe pas de parties de E avec un nombre négatif d'éléments ou plus d'éléments que dans E.

Démonstration 7. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit F un sous-ensemble de E de cardinal k. Comme F est de cardinal k il existe alors, d'après la proposition 8, $k!$ manières différentes de placer dans un certain ordre les éléments de F.
Ainsi il existe $\binom{n}{k} \times k!$ listes ordonnées de k éléments choisis parmi E.
Or on a vu dans le théorème 7, qu'il existait $\frac{n!}{(n-k)!}$ listes ordonnées de k éléments choisis parmi E.
Ainsi $\binom{n}{k} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!}$, soit

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Méthode-exemple 9 (calcul des coefficients binomiaux)

On sera amenés à calculer des coefficients binomiaux "à la main".

- Retenir les formules du cours : $\binom{n}{0} = \binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, "miroir", et $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
- Savoir construire le triangle de Pascal (et connaitre la formule de Pascal)
- Connaitre les formules :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times ... \times 1}$$

Pour déterminer $\binom{10}{4}$:

$$\binom{10}{4} = \frac{\overbrace{10 \times 9 \times 8 \times 7}^{4 \text{ facteurs}}}{\underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{4 \text{ facteurs}}} \underbrace{=}_{\textbf{Simplifier !!!}} = \frac{10 \times 3 \times 7}{1} = 210$$

Mét livre 9

1-2-3 page 281

V 5. Exemple

V 6. Autre exemple

Remarque 14.
Attention à ne pas calculer le numérateur et le dénominateur avant d'avoir simplifier

Exemple 9. Je souhaite créer un groupe de trois filles parmi les filles de notre groupe de spécialité, j'ai alors $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ possibilités pour le faire.

Mét livre 10

1 page 283

V 7. Exemple

Méthode-exemple 11 (Suite de combinaisons.)

Dans le cas d'une urne avec 5 boules blanches, 3 noires et 2 rouges. On tire simultanément 5 boules.
• Le nombre de possibilités totales est simplement $\binom{10}{5}$.
• le nombre de possibilités avec 3 blanches et 2 noires est :

$$\underbrace{\binom{5}{3}}_{3 \text{ B parmi } 5} \times \underbrace{\binom{3}{2}}_{2 \text{ N parmi } 3} \times \underbrace{\binom{2}{0}}_{0 \text{ R parmi } 2} = 10 \times 3 \times 1 = 30$$

C Propriétés des "coefficients binomiaux".

Proposition 11

V 8. https ://youtu.be/6JGrHD5nAocTriangle de Pascal Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0; n]\!]$, on a les propriétés :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ (ici k<n, cette formule est la formule de Pascal)
- $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$ (Ici $k > 0$, $12^{ième}$ formule du traité de Pascal)

Mét livre 12

2 page 283

Démonstration 8. : Pour $(X = 0)$, il n'y a qu'un chemin qui permet d'obtenir cet évènement, donc $\binom{n}{0} = 1$. Idem pour $(X = n)$, on obtient : $\binom{n}{n} = 1$

Démonstration 9. Le nombre permettant d'obtenir $(X = k)$ (c'est-à-dire obtenir) est le même que le nombre de chemin permettant d'obtenir k échecs par symétrie (c'est à dire $n - k$ succès). Donc :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

.

Démonstration à connaitre absolument 1 (Formule du triangle de Pascal)

Si l'on commence à construire l'arbre représentant $n + 1$ expériences de Bernoulli. Pour obtenir $k + 1$ succès, nous pouvons décompter :

- Le nombre de chemin avec $k + 1$ succès et commençant par un succès (c'est-à-dire commençant par S_1) au quel cas l'on complète par k succès lors de la répétition de n expériences. On obtient donc $\binom{n}{k}$ possibilités dans ce cas.
- Le nombre de chemin avec $k + 1$ succès et commençant par un échec (c'est-à-dire commençant par E_1) au quel cas l'on complète par $k + 1$ succès lors de la répétition de n expériences. On obtient donc $\binom{n}{k+1}$ possibilités dans ce cas.

On fait la somme du nombres de possibilités dans ces deux configurations et l'on obtient :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Démonstration à connaitre absolument 2 (Formule du triangle de Pascal)

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right] \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left[\frac{n-k+k+1}{(k+1)(n-p)} + \frac{1}{n-k}\right] = \frac{n! \times (n+1)}{k!(n-k-1)! \times (k+1)(n-k)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

Remarque 15. Dans le programme les deux démonstrations de cette même formule sont à connaitre

Démonstration 10. Pour démontrer la formule : $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$. Si l'on considère un chemin avec $(k-1)$ succès, pour obtenir un chemin à k succès il suffit de transformer un des $(n-k+1)$ échecs en un succès. On peut donc à partir de ce chemin obtenir $(n - k + 1)$ chemin à k succès. Mais en procédant ainsi pour chaque chemin à $(k - 1)$ succès, nous obtenons le même chemin k fois.
En effet si l'on considère le chemin $\underbrace{S - S - ... - S}_{k\ succès} - \underbrace{E - E - ... - E}_{(n-k)\ Echecs}$, ce chemin avec la technique précédente, peut être obtenue à partir des k chemins :

- $\underbrace{E - S - S - ... - S}_{k\ succès} - \underbrace{E - E - ... - E}_{(n-k)\ Echecs}$
- $\underbrace{S - E - S - ... - S}_{k\ succès} - \underbrace{E - E - ... - E}_{(n-k)\ Echecs}$
- ...
- $\underbrace{S - S - ... - E}_{k\ succès} - \underbrace{E - E - ... - E}_{(n-k)\ Echecs}$

On obtient donc :

$$\binom{n}{k} = \underbrace{\frac{1}{k}}_{k\ chemins\ comptés\ en\ trop.} \left(\underbrace{(n-k+1)}_{obtenu\ en\ échangeant\ un\ des\ (n-k+1)\ "E"\ en\ "S"} \binom{n}{k-1}\right)$$

Algorithmie 13

Utilisation de la formule de pascal pour trouver tous les coefficient binomiaux au rang $n \in \mathbb{N}^*$.

```
def coefbin(n):
    L=[[0 for i in range(10)] for k in range(10)]
    if n==0:
        return L
    else:
        L[n][0]=1
        L[n][n]=1
        for i in range(1,n):
            L[n][i]=coefbin(n-1)[n-1][i-1]+coefbin(n-1)[n-1][i]
    return L

def bino(n):
    return coefbin(n)[n]

def binom(n):
    L=[0 for i in range(n+1)]
    for i in range(n+1):
        G=[]
        for i in range(len(L)):
            G.append(L[i])
        G[0]=1
        G[i]=1
        for j in range(1,i):
            G[j]=L[j-1]+L[j]
        L=[]
        for i in range(len(G)):
            L.append(G[i])
    return L
```

Programme "Pour un entier n donné, génération de la liste des coefficients binomiaux à l'aide de la relation de Pascal."

D Autre approche du Binôme de Newton.

Proposition 12 (Rappel)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Remarque 16. On voit ici un approche combinatoire de la formule du Binôme de Newton.

Démonstration 11.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times ... \times (a+b)}_{\text{Doit être interprété comme n "emplacements" lors du développement.}}$$

Soit $k \in [\![0; k]\!]$. Pour obtenir le coefficient de $a^k b^{n-k}$ il faut choisir k fois "a" lors de développement (dès lors "b" sera choisi $n-k$ fois) . Le nombre de façons de choisir k fois "a" est bien $\binom{n}{k}$. D'où le coefficient du monôme $a^k b^{n-k}$ et on retrouve :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

E Nombre de sous-ensembles.

1 Approche ensembliste.

Proposition 13

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini et on a

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

Démonstration à connaitre absolument 3

Soit E un ensemble de cardinal fini n. Combien E admet-il de sous-ensembles ?
Pour répondre à cela posons nous la question de comment construire un sous-ensemble F de E. On prend les éléments un par un et pour chaque élément :

- soit on le "choisit"
- Soit non.

Soit 2 possibilités pour chacun des n éléments. Donc en tout, 2^n façons de construire une sous-partie de E.

Remarque 17. Ne pas hésiter à faire un arbre.

2 Approche calculatoire.

Proposition 14

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini et on a

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration à connaitre absolument 4

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Si l'on note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des sous-parties de E de cardinal $k \in [\![0, n]\!]$.
On a l'union disjointe :

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$$

Donc :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) \underbrace{=}_{\text{union disjointe}} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k}}_{\text{Binôme de Newton}} = 2^n$$

Remarque 18. Pour la dernière étape, il s'agit de la démonstration précédente.

3 Approche fonctionnelle.

Proposition 15

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini et on a :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{Card}\left(\mathcal{A}(E, [\![0, 1]\!])\right) = \mathrm{Card}([\![0, 1]\!])^{\mathrm{Card}(E)} = 2^n$$

Démonstration 12. Reprendre la démonstration 8 avec $\mathcal{A}(E, [\![0, 1]\!])$

V Méthodes.

Méthode-exemple 14 (anagramme)

Le nombre d'anagrammes de "anagramme" (attention ici on considère toutes les mots : avec ou sans sens) :

- On réfléchit en termes "d'emplacements". Il y en a 9 ici (puisque 9 lettres)
- On dénombre le nombre de représentants de chaque lettre :
  - 3 "a"
  - 2 "m"
  - 1 pour les 4 autres lettres.
- Il y a $\binom{9}{3} = 84$ façons de placer les "a".
- Il ne reste plus que $9 - 3 = 6$ emplacements possibles pour les "m" et donc $\binom{6}{2} = 15$ façons de placer les 2 "m".
- Ensuite pour le "n" : $\binom{4}{1} = 4$ (puisqu'il ne reste que 4 emplacements)
- Ensuite pour le "g" : $\binom{3}{1} = 3$
- Ensuite pour le "r" : $\binom{2}{1} = 2$
- Ensuite pour le "e" : $\binom{1}{1} = 1$

Le nombre de possibilités au total est donc :

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 84 \times 15 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Remarque 19. Si toutes les lettres sont différentes, par exemple "table", le nombre d'anagrammes est simplement le nombre de permutations :

$$5! = 120$$

Méthode 15

Pour compter le nombre d'éléments vérifiant une propriété ou compter le nombre de configurations issues d'une expérience,

- on découpe le problème en plusieurs étapes
- on utilise les formules du cours pour dénombrer chaque étape.
- On fera bien attention de vérifier qu'on n'a pas oublié de cas et qu'on n'a pas compté plusieurs fois les mêmes cas (sinon il faudra diviser par le nombre de fois que l'on a compté).