Chap 2 : Continuité, dérivation, convexité.

I Histoire

Sa création est liée à une polémique entre deux mathématiciens : Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz. Néanmoins, on retrouve chez des mathématiciens plus anciens les prémices de ce type de calcul : Pierre de Fermat et Isaac Barrow notamment. L'histoire du calcul infinitésimal remonte même à l'Antiquité, avec Archimède.

La notion de nombre dérivé a vu le jour au xviie siècle dans les écrits de Leibniz et ceux de Newton, qui le nomme fluxion et qui le définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ». C'est à Lagrange (fin du xviiie siècle) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x. C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique.

Isaac Newton 1642-1727
Gottfried Wilhem 1646-1716
Pierre de Fermat 16..-1665
Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716

II Continuité

Définition 1 (Continuité en un point et sur un segment)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit $a \in I$. On dit que f est **continue en** a lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- La fonction f est **continue sur** I si, pour tout réel a de I, f est continue en a.

Remarque 1. Attention : La définition exacte de la limite en un pont sera vu plus tard. Nous utiliserons la calculatrice pour déterminer les limites dans ce chapitre.

Exemple 1. $\lfloor . \rfloor : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ où $\lfloor x \rfloor$ est l'entier relatif définie par $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Cette fonction est discontinue en tous points de $\mathbb{Z}$ mais continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

Théorème 1 (Théorèmes dit usuels)

- Toutes les fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition, ainsi que les polynômes et les factions rationnelles.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues sur les intervalles formant leur ensemble de définition.

Remarque 2. Nous pourrons à terme nous contenter de rappeler "la fonction ... est continue d'après les théorèmes usuels sur la continuité"

Proposition 2

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque 3. Même si nous ne voyons pas de démonstration de cette proposition, il est évident que si nous avons une discontinuité en a, nous ne pouvons pas tracer de tangente en ce point.

Exemple 2. Méthode 1 page 119 ***Ex 31 à 35 page 133***

Proposition 3 (Définition séquentiel de la continuité)

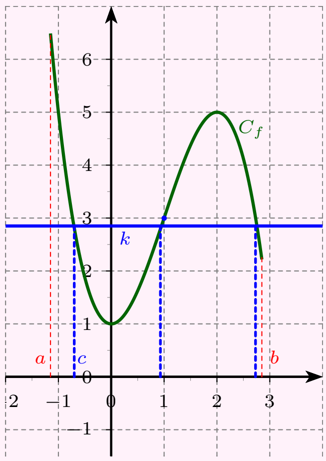
Soit f une fonction définie sur I, $a \in I$ et E l'ensemble des suites d'éléments de I convergent vers a. Alors :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall (u_n) \in E, (f(u_n)) \text{ converge vers } a$$

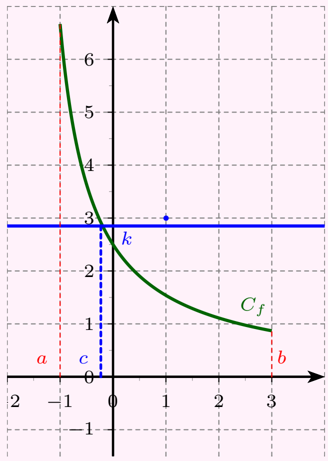
Remarque 4. Cette définition est rarement utilisée surtout en terminale

Théorème 4 (Théorème des valeurs intermédiaires)

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Avec les hypothèses précédentes, si la fonction est strictement monotone, la solution c est unique.



Remarque 5. Théorème fondamental permettant notamment de justifier l'existence d'une solution pour une équation.

Ces théorèmes s'étend au cas $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ et f continue sur $]a, b[$ et admettant une limite en a et une limite en b. Dès lors k est compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$

Exemple 3. Méthode 1 et 2 page 121. ***Ex 36 à 40 page 133***

III Complément sur la dérivation : composition

Définition 2

Soit $u : E \to F$ et $v : F \to G$ deux fonctions réels définies respectivement sur E et F alors l'on définie la fonction composée de u par v sur E, notée $v \circ u$ par $v \circ u(x) = v\left(u(x)\right)$ pour tous $x \in E$.

Remarque 6. **Attention,** on remarquera qu'il faut que u prenne des valeurs dans l'ensemble de définition de v.

Exemple 4. Méthode 1-2 page 113 ***Ex 1 à 4 page 130***

Remarque 7. Vous remarquerez l'ajout de la formule donnant la dérivée d'une composée de fonction.

Proposition 5

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J vérifiant $u(I) \subset J$. Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$
D'où le tableau :

Fonction	Dérivée
u^2	$2u'u$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
u^n $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$
e^u	$u'\mathrm{e}^u$
$\ln(u)$	$u'\ln(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(v(x))$	$v'(x) \times u'(v(x))$

IV Convexité d'une fonction

A Fonction convexe, fonction concave

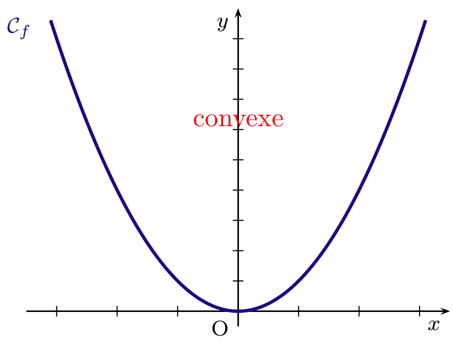
Définition 3

f est une fonction continue sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.

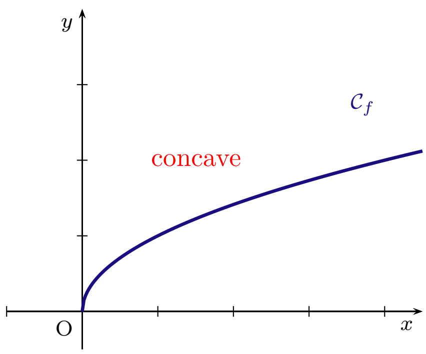
- Dire que f est **convexe** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessous** de chacune de ses cordes.
- Dire que f est **concave** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessus** de chacune de ses cordes.

Remarque 8. Une fonction f est convexe si et seulement si tout segment reliant deux points de la courbe est au-dessus de la courbe.

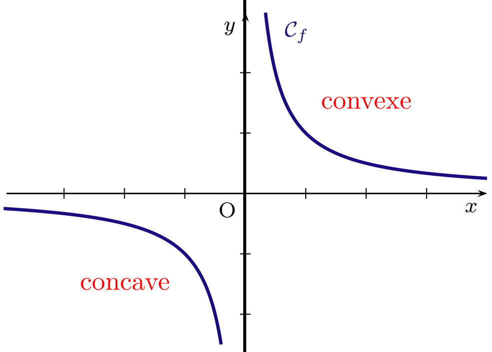
Exemple 5. Parmi les fonctions usuelles, on a :



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave.

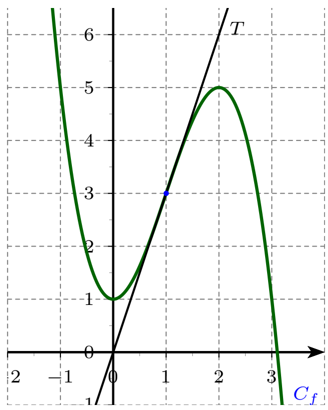


La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

Exemple 6. Méthode 1 page 115 ***17-21 page 131***

Définition 4 (Point d'inflexion)

Soient f est une fonction continue sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et $A(a, f(a))$ un point de $\mathscr{C}$ où f admet une tangente (c'est-à-dire que f est dérivable en a).
Le point A de $\mathscr{C}$ est **un point d'inflexion** de $\mathscr{C}$ si au point A la courbe $\mathscr{C}$ *traverse* sa tangente en A.



Remarque 9. La courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable admet un point d'inflexion en A d'abscisse a quand la fonction f change de convexité c'est-à-dire passe de convexe à concave ou de concave à convexe en a.

Exemple 7. Méthode 2 page 115 ***22-23-29 page 131-132***

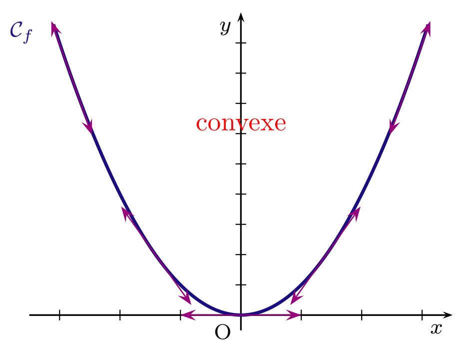
B Convexité d'une fonction dérivable

Définition 5

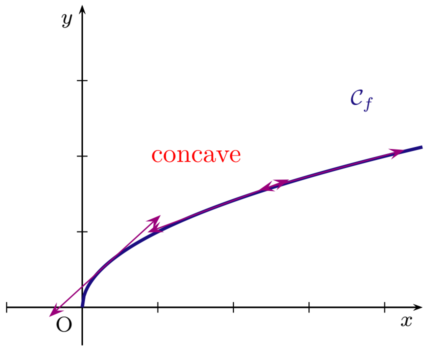
f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.

- Dire que f est **convexe** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessus** de chacune de ses tangentes.
- Dire que f est **concave** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessous** de chacune de ses tangentes.

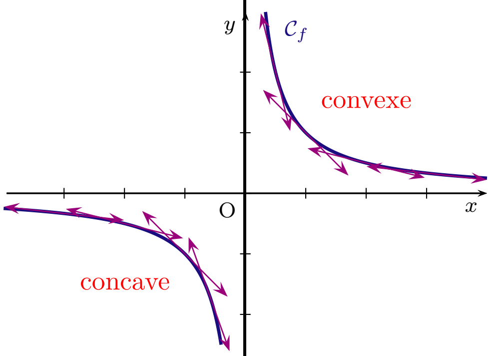
Exemple 8. Parmi les fonctions usuelles, on a :



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave.



La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

C Convexité d'une fonction et dérivée

1 Convexité et sens de variation de f'

Proposition 6

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est **convexe** sur I si, et seulement si, f' est **croissante** sur I.
- f est **concave** sur I si, et seulement si, f' est **décroissante** sur I

2 Convexité et signe de f''

Définition 6

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Dire que f est **deux fois dérivable** sur I signifie que f' est elle-même dérivable sur I. La dérivée de f', notée f'', est appelée **dérivée seconde** de f.
On définie ainsi par itération une fonction k**-dérivable** et l'on notera la dérivée k-ième $f^{(k)}$.

Exemple 9. ***Ex 15-16 page 131***

Proposition 7

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si, et seulement si f'' est positive sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si f'' est négative sur I.

Remarque 10. .
En effet,
• Sif'' est positive sur I signifie que f' est croissante sur I, alors f est convexe sur I.
• Si f'' est négative sur I signifie que f' est décroissante sur I, alors f est concave sur I.

Exemple 10. Méthode 1-2 page 117 ***22 à 30 page 131-132***

Remarque 11. .
• Signe de f' $\Longrightarrow$ Variations de f.
• Signe de f'' $\Longrightarrow$ Variations de f' $\Longrightarrow$ Convexité de f.

3 Point d'inflexion et dérivée seconde

Proposition 8

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. La courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.